PROJETO

Newton

Caderno de Exercícios

Cálculo I

3

André Fellipe Ribeiro de Almeida
Cristina Lúcia Dias Vaz

Caderno 3: Exercícios de Cálculo I

1ª Edição

2017

Caderno de Questões - Cálculo I

Sumário

Funções

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Operações com funções e intervalos;
- Novas funções a partir de funções conhecidas;
- Problemas envolvendo funções;

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Função e suas propriedades;
- Intervalos e suas propriedades;

Métodos e Técnicas

Modelagem de Problemas utilizando funções

- Na questão citada tem-se a modelagem de problemas por funções:

Exercício 1.4

Operações e Transformações de Funções

- Nas questões citada efetua-se as operações de funções:

Exercícios 1.1; 1.3; 1.5; 1.7; 1.8

- Na questão citada efetua-se as transformações de funções a partir de funções conhecidas:

Exercício 1.6

Enunciado dos Exercícios

●○○○

1.1

(a) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $A = (1,2)$ e $B = (-1,4)$;

(b) Seja $P = (-2,5)$ um ponto da reta **r**, que é paralela a reta $x - 6\,y = 1$.

Encontre a equação da reta **r**.

●●○○

1.2 Resolva:

(a) $1 + |2\,x - 4| = 3$;

(b) $3 - 4\,|x - 1| < -1$.

●●○○

1.3

(a) Encontre os valores reais de p e q para os quais a relação

$$\{(-5,0), (-1,3), (0,2), (p,q), (12,6)\}$$

é uma função;

(b) Encontre um número real x para o qual a relação

$$\{(-3,5), (-2,1), (-1,x), (0,3), (1,11), (2,-5)\}$$

é injetora.

●●○○

1.4 O gerente de uma fábrica determinou que, quando x centenas de unidades do produto **A** forem fabricadas todas poderão ser vendidas por um preço unitário dado pela função $p(x) = 60 - x$ reais. Para que nível de produção a receita é máxima? Qual é a receita máxima?

●●●○

1.5 Considere a função $f(x) = 6\,x - x^2$ e o ponto $P = (1, 5)$ do gráfico de f.

(a) Desenhe o gráfico de f e as retas secantes que passam pelo ponto P e os pontos $Q = (x, f(x))$ para $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ e 2;

(b) Encontre o coeficiente angular de cada reta secante do item (b);

(c) Use os resultados do item (b) para estimar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P;

(d) Descreva como você pode melhorar a aproximação do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, dada no item (c).

●●○○

1.6 Considere o gráfico da função $y = f(x)$.

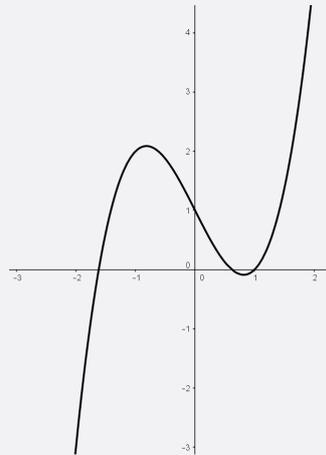
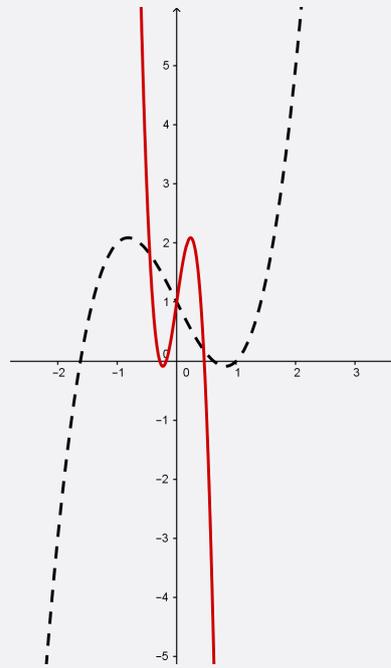
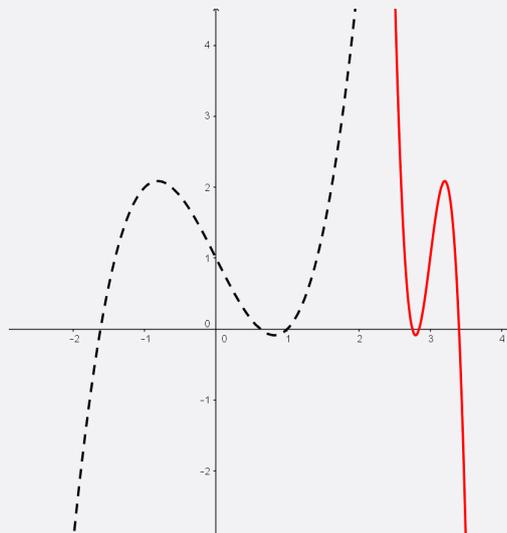
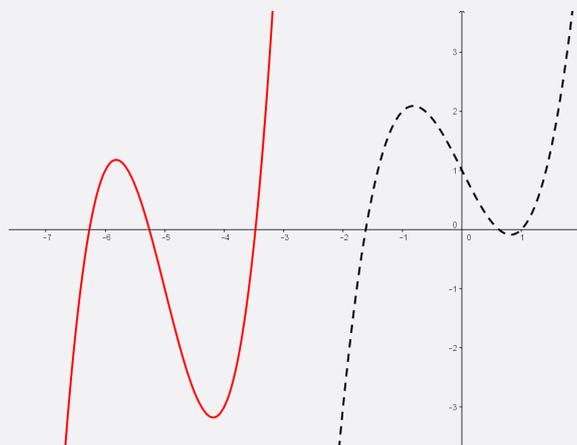
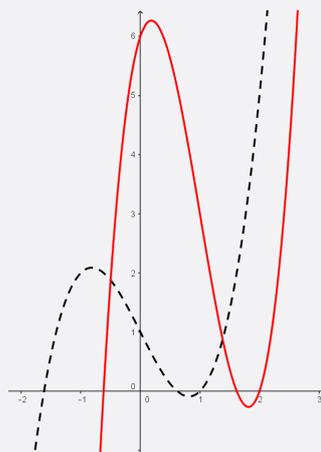



Gráfico da função $y = f(x)$.

Determine as transformações ocorridas no gráfico de f nos seguintes exemplos abaixo:

(b)

(c)

(d)

●●●○

1.7 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, justifique; se for falso dê um exemplo que mostre que a afirmação é falsa (Contra-exemplo).

(a) Como $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, obtemos que $f \circ g = g \circ f$ no domínio das respectivas compostas;

(b) Se f e g são funções tais que é possível calcular a composta delas, então $f \circ g = g \circ f$;

(c) Se f é bijetora então f não admite o mesmo valor mais de uma vez;

(d) Se f é uma função então $f(3x) = 3f(x)$;

(e) Uma reta horizontal intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.

●●●○

1.8 Seja $t = x + \dfrac{1}{x}$, com $x \neq 0$.

(a) Calcule, em função de t, as funções $g = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ e $h = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$;

(b) Esboce o gráfico da função $z(t) = \left(g(t) + \dfrac{h(t)}{t}\right) t$.

Sugestões

1.1 Lembre-se que retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular.

1.2 Utiliza a definição de módulo e suas propriedades.

1.3 Use a definição de função.

1.4 A função receita está relacionada ao valor arrecadado pela venda de um determinado produto.

1.5 Use um *software* matemático para plotar o gráfico de f e as retas secantes.

1.6 Use um *software* matemático para observar as transformações de uma função qualquer.

1.7 Use a definição de função composta e função bijetora.

1.8 Em

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

faça $a = x$ e $b = \dfrac{1}{x}$.

Respostas

1.1

(a) Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 4)$;

Solução: Vamos usar a equação geral da reta:

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{1}$$

Calculando o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos dados A e B obtemos

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{4 - 2}{-1 - 1} = -1$$

Logo, considerando o ponto $A = (1, 2)$ a equação (1) torna-se

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 2 &= -1(x - 1) \\ y &= -x + 3 \end{aligned}$$

(b) Seja $P = (-2, 5)$ um ponto da reta **r**, que é paralela a reta $x - 6\,y = 1$.

Encontre a equação da reta **r**.

Solução: Lembrando que. duas retas são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares forem iguais.

Deste modo, devemos encontrar o coeficiente angular da reta **r**, que denotaremos por m_r. Para isso usaremos a informação que a reta $x - 6\,y = 1$ é paralela a reta r, logo, conhecendo o coeficiente dessa reta conheceremos o valor de m_r. Mas,

$$x - 6\,y = 1 \Rightarrow y = \frac{x}{6} - \frac{1}{6},$$

o que implica $m_r = \dfrac{1}{6}$.

Com o valor do coeficiente angular m_r e o ponto $P = (-2, 5)$ podemos usar a equação geral da reta para obter

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 5 &= \frac{1}{6}(x - (-2)) \\ y &= \frac{x}{6} + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Logo, a equação da reta r é dada por $y = \dfrac{x}{6} + \dfrac{16}{3}$.

1.2 Resolva:

(a) $1+|2\,x-4|=3$;
Solução: Lembrando a definição de módulo, temos:

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{se} \quad 2\,x-4 \geq 0 \\ \\ -2x+4 & \text{se} \quad 2\,x-4<0 \end{cases}$$

Assim,

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \\ -2x+4 & \text{se} \quad x<2 \end{cases}$$

Logo,

Para $x \geq 2$	Para $x < 2$
$2x-4 = 2$	$-2x+4 = 2$
$x = 3$	$x = 1$

Verificando os valores obtidos para os intervalos encontrados, obtêm-se que os pontos satisfazem a equação. Portanto, $1+|2\,x-4|=3 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=3$.

(b) $3-4\,|x-1|<-1$.
Solução: Observe que:

$$3-4\,|x-1|<-1 \Rightarrow -4|x-1|<-4 \Rightarrow -|x-1|<-1.$$

Multiplicando a expressão por -1 tem-se

$$-|x-1|<-1 \Rightarrow |x-1|>1.$$

Agora, usando a propriedade $|x|>a \Leftrightarrow x>a$ ou $x<-a$, para $a>0$, obtemos

$$x-1>1 \;\text{ ou }\; x-1<-1,$$

o que implica

$$x>2 \;\text{ ou }\; x<0,$$

Logo, a solução para a inequação é $S = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Geometricamente temos

1.3

(a) Encontre os valores reais de p e q para os quais a relação

$$\{(-5,0),(-1,3),(0,2),(p,q),(12,6)\}$$

é uma função;

Solução: De acordo com a definição de função, para cada x do domínio deve existir em correspondência um e só um y na imagem. Geometricamente, isso significa que ao traçar uma reta vertical no domínio, deverá existir apenas um valor de y associado a essa abscissa.

A resposta para esta questão não é única. Existem uma infinidades de respostas. Assim, para qualquer p diferente dos valores $\{-5,-1,0,12\}$ deve existir em correspondência um e só um q. Por exemplo, o par $(p,q) = (1,3)$ é uma resposta correta.

Observe que o par $(-1,1)$ é uma resposta incorreta.

(b) Encontre um número real x para o qual a relação

$$\{(-3,5),(-2,1),(-1,x),(0,3),(1,11),(2,-5)\}$$

é injetora.

Solução: Denominamos função injetora, a função que transforma diferentes elementos do domínio em diferentes conjuntos da imagem, ou seja, não existe elemento da imagem que possui correspondência com mais de um elemento do domínio. Assim, para $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Logo, x pode assumir qualquer valor diferente das imagens, ou seja,

$$x \notin \{-5,1,3,5,11\}.$$

1.4 O gerente de uma fábrica determinou que, quando x centenas de unidades do produto **A** forem fabricadas todas poderão ser vendidas por um preço unitário dado pela função $p(x) = 60 - x$ reais. Para que nível de produção a receita é máxima? Qual é a receita máxima?
Solução: Temos que receita está relacionada ao valor arrecadado pela venda de um determinado produto, assim, se foram vendidos x produtos, sendo o preço unitário de $60 - x$, então a receita é

$$R(x) = (60 - x)x \Rightarrow R(x) = 60x - x^2.$$

Observe que, $R(x) \geq 0$ se $0 \leq x \leq 60$.

Como queremos o valor de x para o qual a receita é máxima e $R(x)$ é dada por uma parabóla, sabemos que o ponto de máximo é dado por

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2(-1)} = 30 \text{ centenas } (3.000) \text{ de unidades.}$$

Logo, a receita máxima é

$$R(30) = 60(30) - (30)^2 \quad \Rightarrow \quad R(30) = 900 \text{ unidades de reais.}$$

Portanto, a fábrica deve produzir 3.000 unidades e com esse nível de produção, a receita esperada é de 90.000 reais.

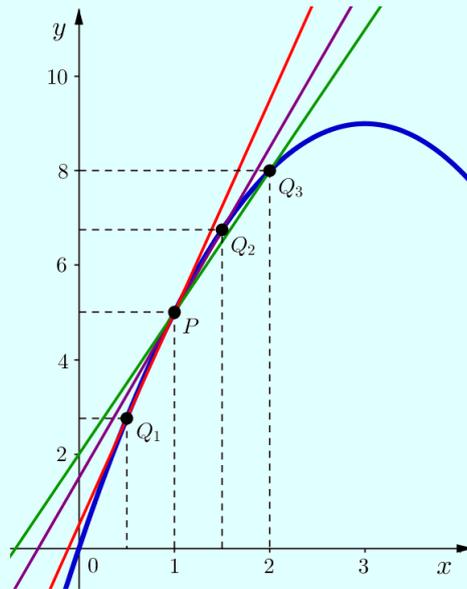
1.5 Considere a função $f(x) = 6\,x - x^2$ e o ponto $P = (1, 5)$ do gráfico de f.

(a) Desenhe o gráfico de f e as retas secantes que passam pelo ponto P e os pontos $Q = (x, f(x))$ para $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ e 2;
Solução: Vamos primeiro determinar os pontos $Q = (x, f(x))$.

Para $x = \frac{1}{2}$, $\;f(x) = \frac{11}{4}$, logo, $Q_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$.

Para $x = \frac{3}{2}$, $\;f(x) = \frac{27}{4}$, logo, $Q_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$.

Para $x = 2$, $\;f(x) = 8$, logo, $Q_3 = (2, 8)$.

A figura abaixo mostra o gráfico de f e as retas as secantes:

(b) Encontre o coeficiente angular de cada reta secante do item (a);

Solução: Sabemos que o coeficiente angular de uma secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$ é dado por:

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Assim, para a reta que passa por $P = (x_0, f(x_0)) = (1, 5)$ e $Q_1 = (x_1, f(x_1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$ tem-se

$$m_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{5 - \frac{11}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{9}{2} = 4.5.$$

Para a reta que passa por $P = (1, 5)$ e $Q_2 = (x_2, f(x_2)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{27}{4}\right)$ tem-se

$$m_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \frac{5 - \frac{27}{4}}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Para a reta que passa por $P = (1, 5)$ e $Q_3 = (x_3, f(x_3)) = (2, 8)$ tem-se

$$m_3 = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} = \frac{5 - 8}{1 - 2} = 3.0$$

(c) Use os resultados do item (b) para estimar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P;

Solução: Note que, para reta tangente em P não podemos usar a fórmula (2).

Para estimar o valor do coeficiente angular m_T da reta tangente em P observe que, pelo item (b), as retas secantes passando por P e pelos pontos Q suficientemente próximos

de P "aproximam-se" da reta tangente. Logo, esperamos que os coefientes angulares destas retas secantes "aproximem-se" do coeficente angular da tangente.

Usando os resultados do item (b) e a ideia descrita acima, temos que os pontos mais próximos do ponto P que são Q_1 e Q_2. Para estes pontos o coeficiente angular das secantes são m_1 e m_2. Podemos escolher uma aproximação usando m_1 ou m_2, por exemplo

$$m_T \approx m_2 = 3.5$$

(d) Descreva como você pode melhorar a aproximação do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto P, dada no item (c).

Solução: Como nossa aproximação do coeficiente angular m_T é dada pelos coeficientes m_s de retas secantes passando por P e pontos Q próximos de P, para melhorar nossa aproximação devemos tomar pontos mais próximos de P e calcular os coeficientes angulares das secantes.

Por exemplo, subdividindo o intervalo $[1, 2]$ em n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ com tamanho $h = 1/n$ e $1 \leq i \leq n$ obtemos abscissas $x_i = 1 + h\,i$ de pontos Q_i muito próximos de P. De fato, para $n = 10$ temos

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$f(x_i)$	5.39	5.76	6.11	6.44	6.75	7.0	7.31	7.56	7.79	8.0
m_i	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1	3.0

O ponto mais próximo de P na tabela acima é $Q_1 = (1.1, 5.39)$ e, logo, podemos aproximar m_T pelo coeficiente $m_1 = 3.9$, ou seja, $m_T \approx 3.9$. Observe que esta aproximação é melhor do que a aproximação dada no item (c).

1.6 Considere o gráfico da função $y = f(x)$.

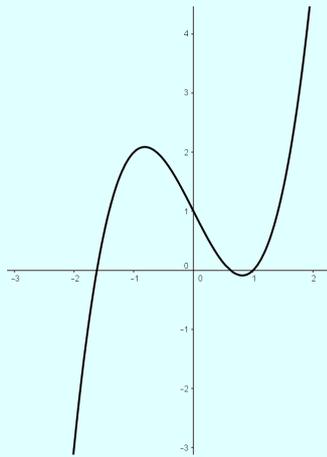
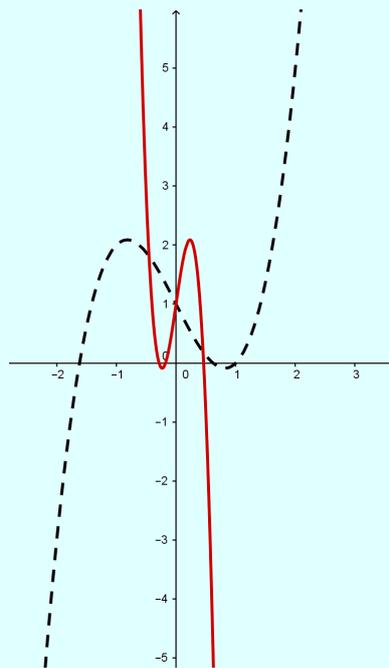



Gráfico da função $y = f(x)$.

Determine as transformações ocorridas no gráfico de f nos seguintes exemplos abaixo:

(a)

Solução: Percebe-se que a função foi obtida pela reflexão em torno do eixo y e compressão horizontal.
Primeiramente vamos refletir a função em torno do eixo y, assim,

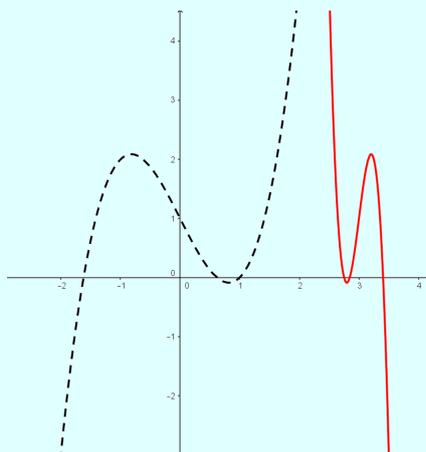
$$h(x) = f(-x).$$

Comprimindo agora horizontalmente, temos que

$$g(x) = h(cx) = f(-cx) \qquad \text{para } c > 1.$$

Logo, a nova função será dado por

$$g(x) = f(-cx) \qquad \text{para } c > 1.$$

(b)

Solução: Percebe-se que a função foi obtida pela reflexão em torno do eixo y, compressão horizontal e deslocamento para a direita.
Primeiramente vamos deslocar c unidades para direita, assim,

$$h(x) = f(x - c) \qquad \text{para } c > 0.$$

Seguindo, vamos comprimir horizontalmente a função $h(x)$ por um fator k, logo,

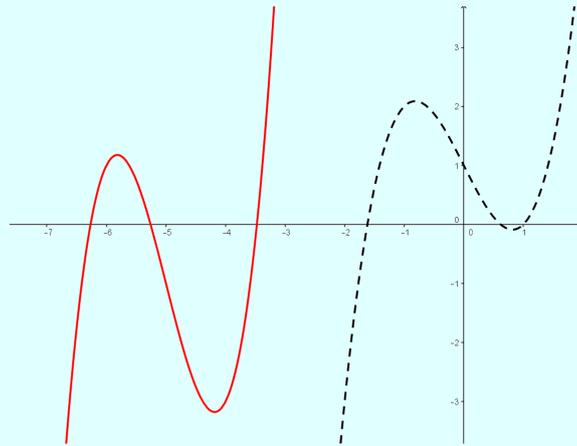
$$g(x) = h(kx) = f(k(x - c)) \qquad \text{para k} > 1.$$

Por último, vamos fazer a reflexão em torno do eixo y.

$$p(x) = g(-x) = f(-k(x - c)).$$

Logo, a nova função será dado por

$$p(x) = f(-k(x - c)) \qquad \text{para } c > 0 \text{ e k} > 1.$$

(c)

Solução: Percebe-se que a função foi obtida pela expansão vertical, deslocamento para a esquerda e deslocamente vertical para baixo.
Primeiramente vamos deslocar o gráfico c unidades para a esquerda, assim,

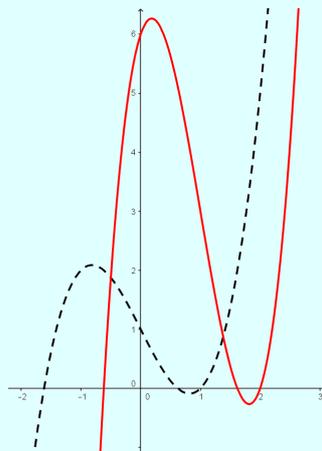
$$h(x) = f(x + c) \qquad \text{para } c > 0.$$

Seguindo, vamos fazer a expansão vertical por um fator k > 1, logo, a nova função obtida será dada por

$$g(x) = \mathrm{k}h(x) = \mathrm{k}f(x + c)$$

Deslocando-a para baixo, temos

$$p(x) = g(x) - c_2 = \mathrm{k}f(x + c) - c_2 \qquad \text{para } c_2 > 0.$$

(d)

Solução: Percebe-se que a função foi obtida pela expansão vertical e deslocamento para a direita.

Primeiramente vamos deslocar o gráfico c unidades para a direita, assim,

$$h(x) = f(x - c) \qquad \text{para } c > 0.$$

Seguindo, vamos fazer a expansão vertical por um fator k > 1, logo, a nova função obtida será dada por

$$g(x) = \mathrm{k}h(x) = \mathrm{k}f(x - c)$$

1.7 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, justifique; se for falso dê um exemplo que mostre que a afirmação é falsa (Contra-exemplo).

(a) Como $f(x) = \dfrac{1-x}{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$, obtemos que $f \circ g = g \circ f$ no domínio das respectivas compostas;

Solução: Falso! Pois a igualdade de funções implica que as funções devem possuir o mesmo domínio, o mesmo contradomínio e

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

para todo x no domínio. Contudo

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

e

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Como esses domínios são conjuntos diferentes, verifica-se que $g \circ f \neq f \circ g$.

(b) Se f e g são funções tais que é possível calcular a composta delas, então $f \circ g = g \circ f$;

Solução: Falso! Considere por exemplo $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$.

Calculando $f \circ g$

$$f(g(x)) = 2g(x) = 2x^2$$

Calculando $g \circ f$

$$g(f(x)) = (f(x))^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

Logo, $g \circ f \neq f \circ g$.

(c) Se f é bijetora então f não admite o mesmo valor mais de uma vez;

Solução: Verdadeiro! Temos que uma função é dita bijetora quando é simultaneamente injetora e sobrejetora. Por sua vez, uma função é dita injetora se nenhuma reta horizontal intercepta seu gráfico em mais de um ponto.

(d) Se f é uma função então $f(3x) = 3f(x)$;
Solução: Falso! Considere a função $f(x) = x^2$.

Para $f(3x) = (3x)^2 = 9x^2$.

Para $3f(x) = 3x^2$.

Logo, verifica-se que $f(3x) \neq 3f(x)$.

(e) Uma reta horizontal intercepta o gráfico de uma função no máximo uma vez.
Solução: Falso! Uma função só terá a propriedade de uma reta horizontal interceptar o gráfico apenas uma vez se for injetora. Assim, basta utilizar uma função não injetora, como $f(x) = x^2$.

1.8 Seja $t = x + \dfrac{1}{x}$, com $x \neq 0$.

(a) Calcule, em função de t, as funções $g = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ e $h = x^3 + \dfrac{1}{x^3}$;

Solução: Seja $g = x^2 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$. Utilizando o produtos notáveis sabemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Logo,

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

Fazendo $a = x$ e $b = \dfrac{1}{x}$, temos que

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

Logo,

$$g(t) = t^2 - 2$$

Seja agora $h = x^3 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^3$. Utilizando o produtos notáveis sabemos que

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a+b)([a^2 + b^2] - ab) \end{aligned}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Fazendo $a = x$ e $b = \dfrac{1}{x}$, temos que

$$\begin{aligned}
x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right] - 1\right) \\
&= t(t^2 - 2 - 1) \\
&= t^3 - 3t
\end{aligned}$$

Logo,

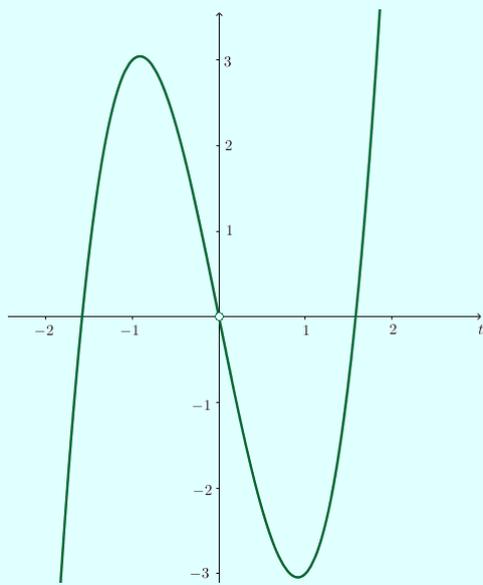
$$h(t) = t^3 - 3t$$

(b) Esboce o gráfico da função $z(t) = \left(g(t) + \dfrac{h(t)}{t}\right)t$.

Solução: Primeiramente vamos encontrar a função $z(t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
z(t) &= \left(g(t) - \frac{h(t)}{t}\right)t \\
z(t) &= \left(t^2 - 2 + \frac{t^3 - 3t}{t}\right)t \\
z(t) &= (t^2 - 2 + t^2 - 3)t \\
z(t) &= (2t^2 - 5)t \\
z(t) &= 2t^3 - 5t \qquad \text{para} \quad t \neq 0
\end{aligned}$$

Uma vez encontrada a função, basta esboçar o gráfico. Assim,

3
2
1
−2
−1
1
2
t
−1
−2
−3

Limite e continuidade

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Inclinação da reta tangente por limite;
- Propriedades,limites infinitos e limites no infinito;
- Continuidade de uma função;
- Teorema do Valor Intermediário e Teorema do Confronto;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios

- Funções e suas propriedades;
- Limite e suas propriedades;

Métodos e Técnicas

Propriedades Operatórias de Limite, Limites Infinitos, Limites no Infinito e Continuidade.

- Na questão citada tem-se o uso das propriedades operatórias de limite:

Exercício 2.2

- Nas questões citadas usa-se limites infinitos e/ou limites no infinito:

Exercícios 2.6; 2.7

- Na questões citadas usa-se continuidade de funções:

Exercícios 2.2(b); 2.4

Teorema do Valor Intermediário

- Na questão citada usa-se o Teorema do Valor Intermediário:

Exercício 2.3

Enunciado dos Exercícios

●●○○

2.1 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x < -1 \\ -x^2+2 & \text{se} \quad -1 < x \leq 2 \\ x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de f;

(b) Descreva, com suas próprias palavras, o significado de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$;

(c) Utilizando o gráfico, determine o valor dos limites:

(I) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$;

(II) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

(III) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

●●○○

2.2 Calcule os limites abaixo. Enuncie as propriedades e/ou teoremas usados.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} p(x)$ com $p(x) = \sum\limits_{i=1}^{4} a_i\, x^i$ e $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 4$;

(b) $\lim\limits_{x \to 3} f(\text{sen}\,(x))$;

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3(1-\cos(x))}{x}$;

(d) $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{|x-4|}{x-4}$.

●●○○

2.3

(a) Verifique se o Teorema do valor intermediário se aplica para $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $[0, 3]$, $f(c) = 0$;

(b) Descreva um processo para calcular uma aproximação do número c dado no item (a) e calcule uma aproximação de c.

●●●○

2.4 Encontre os valores reais de x (se houver algum) para os quais a função f não é contínua. Existe alguma descontinuidade removível? Qual ou quais?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$;

(b) $f(x) = \dfrac{|x + 5|}{x + 5}$.

●●●○

2.5 Seja $s(t) = t^3 + t^2$ a função posição do deslocamento de um móvel.

(a) Encontre as velocidades médias do móvel nos intervalos de tempo $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_1$, $\Delta t_3 = t_3 - t_2$ e $\Delta t_4 = t_4 - t_3$ para $t_0 = 0$, $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.0$, $t_3 = 1.5$ e $t_4 = 2.0$;

(b) Faça uma interpretação geométrica da velocidade instântanea no instante $t = 1$ usando as velocidades médias;

(c) Use os resultados dos itens (a) e (b) para estimar a velocidade instântanea em $t = 1$;

(d) Descreva como você pode melhorar a aproximação da velocidade instântanea dada no item (c).

●●○○

2.6 Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e faça o que se pede:

(a) Utilizando um aplicativo computacional investigue o gráfico da função f. Depois, faça um desenho à mão livre do mesmo gráfico.

(b) Analise o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela direita. O que podemos afirmar sobre o valor do limite $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$?

(c) Analise agora, o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela esquerda. O que podemos afirmar sobre o valor do limite $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$?

(d) O limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe? Justifique.

●●●○

2.7 Determine todas as assíntotas (verticais, horizontais e oblíquas) da função $f(x) = x + \dfrac{3}{x}$.

Sugestões

2.1 Use um *software* matemático para esboçar cada parte da função.

2.2 Use

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4.$$

2.3 Use o TVI recursivamente para calcular uma aproximação de c.

2.4 Analise as restrições no domínio de f.

2.5 Calcule velocidades médias para intervalos de tempo cada vez menores.

2.6 Atente para a definição de limite.

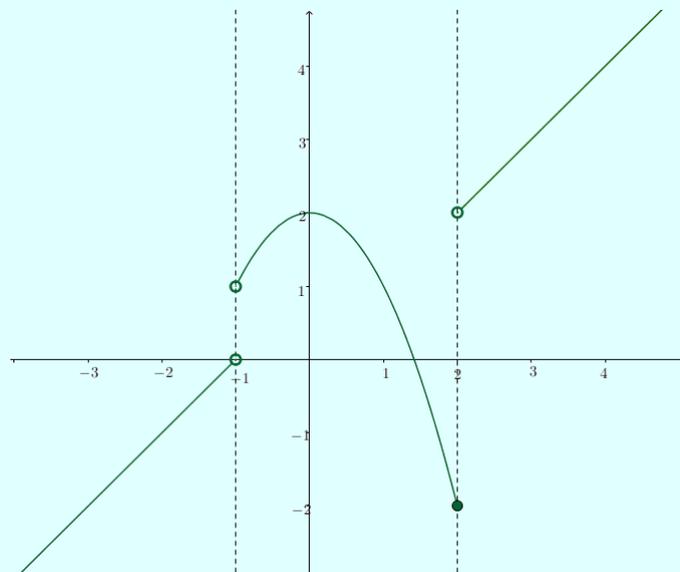
2.7 Analise as restrições no domínio de f.

Respostas

2.1 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x < -1 \\ -x^2+2 & \text{se} \quad -1 < x \leq 2 \\ x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico de f;

Solução: Esboçando o gráfico da função, obtemos

(b) Descreva, com suas próprias palavras, o significado de $\lim_{x \to a} f(x) = L$;

Solução: Considerando uma função $f(x)$ qualquer, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que quanto mais o valor de x se aproxima de a, mais o valor da imagem se aproxima de L, verificando isso quando a aproximação é feita pela direita e pela esquerda.

(c) Utilizando o gráfico, determine o valor dos limites:

(I) $\lim_{x \to -1} f(x)$;

Solução: Observando o gráfico, percebemos que quando x se aproxima de -1 pela esquerda, o valor de f tende a zero. Por sua vez, ao quando x se aproxima de -1 pela direita, o valor de f tende a 1. Como encontramos valores diferentes quando x se aproxima de -1 pela esquerda e pela direita, então esse limite não existe.

(II) $\lim_{x\to 0} f(x)$;
Solução: Observando o gráfico, percebemos que quando x se aproxima de 0 pela esquerda, o valor de f tende 2. Por sua vez, ao quando x se aproxima de 0 pela direita, o valor de f tende a 2. Como encontramos valores iguais quando x se aproxima de 0 pela esquerda e pela direita, então esse limite existe e é igual a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

(III) $\lim_{x\to 4} f(x)$.
Solução: Observando o gráfico, percebemos que quando x se aproxima de 4 pela esquerda, o valor de f tende 4. Por sua vez, ao quando x se aproxima de 4 pela direita, o valor de f tende a 4. Logo,

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 4$$

Observamos ainda que para $x \geq 2$, $f(x) = x$. Como f é uma função polinomial e toda polinomial é contínua, então

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Logo,

$$\lim_{x\to 4} f(x) = x = 4$$

2.2 Calcule os limites abaixo. Enuncie as propriedades e/ou teoremas usados.

(a) $\lim_{x\to 2} p(x)$ com $p(x) = \sum_{i=1}^{4} a_i\, x^i$ e $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 4$;
Solução: Primeiramente precisamos encontrar a função $p(x)$, assim,

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=1}^{4} a_i\, x^i \\ p(x) &= a_1\, x^1 + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 \end{aligned}$$

Pela propriedade do limite da soma, temos

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Aplicando a propriedade do limite da soma e da multiplicação por uma constante por

uma função, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} p(x) &= \lim_{x\to 2}[a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4] \\
&= \lim_{x\to 2}[a_1\, x] + \lim_{x\to 2}[a_2\, x^2] + \lim_{x\to 2}[a_3\, x^3] + \lim_{x\to 2}[a_4\, x^4] \\
&= a_1 \lim_{x\to 2} x + a_2 \lim_{x\to 2} x^2 + a_3 \lim_{x\to 2} x^3 + a_4 \lim_{x\to 2} x^4
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade do limite do produto, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} p(x) &= a_1 \lim_{x\to 2} x + a_2 \left[\left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right)\right] + a_3 \left[\left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right)\right] \\
&+ a_4 \left[\left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} x\right)\right]
\end{aligned}$$

Encontramos $\lim_{x\to 2} p(x)$ pode ser escrito como soma e produto de $\lim_{x\to 2} x = 2$, logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} p(x) &= a_1(2)x + a_2(2^2) + a_3(2^3) + a_4(2^4) \\
&= 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4
\end{aligned}$$

(b) $\lim_{x\to 3} f(\text{sen}\,(x))$;

Solução: Teorema 1: Seja h contínua em b e $\lim_{x\to a} g(x) = b$, então $\lim_{x\to a} h(g(x)) = h(b)$. Em outras palavras,

$$\lim_{x\to a} h(g(x)) = h\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Utilizando o teorema acima, temos que se f for contínua e $g(x) = \text{sen}\,(x)$, então

$$\lim_{x\to 3} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to 3} \text{sen}\, x\right) = f(\text{sen}\, 3).$$

O teorema acima só é válido para uma função h contínua em b, porém devemos verificar também o caso em que h não seja contínua nesse ponto. Para isso, enunciaremos o teorema abaixo:

Teorema 2: Sejam f e g duas funções tais que $\text{Im}f \subset D_g$, $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e $\lim_{u\to a} g(u) = L$. Nestas condições, se existir $r > 0$ tal que $f(x) \neq a$ para $0 < |x-p| < r$, então $\lim_{x\to p} g(f(x))$ existirá e

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u)$$

Logo,

$$\lim_{x \to p} g(f(x)) = L$$

Utilizando o teorema acima, seja

$$\lim_{u \to \text{sen}\,(3)} f(u) = L$$

e

$$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \text{sen}\,(x) = \text{sen}\,(3).$$

Então

$$\lim_{x \to 3} f(g(x)) = \lim_{x \to 3} f(\text{sen}\,(x)) = L$$

(c) $\lim_{x \to 0} \dfrac{3(1 - \cos(x))}{x}$;
Solução: Para calcular esse limite tentaremos chegar ao limite fundamental trigonométrico dado por $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\,x}{x} = 1$. Para tanto, considere $f(x) = \dfrac{3(1 - \cos(x))}{x}$. Utilizando a relação fundamental trigonométrica, onde

$$\text{sen}^2\,x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{sen}^2\,x = 1 - \cos^2 x$$

$$\text{sen}^2\,x = (1 - \cos x)(1 + \cos x)$$

Multiplicando o numerador e denominador da função f por $(1 + \cos x)$, temos que

$$f(x) = \left(\frac{3(1 - \cos(x))}{x}\right)\left(\frac{1 + \cos\,(x)}{1 + \cos\,(x)}\right)$$

$$f(x) = \frac{3\,\text{sen}^2(x)}{x(1 + \cos\,(x))}$$

Consideremos agora $f(x) = h(x) \cdot g(x)$, onde $h(x) = \dfrac{3\,\text{sen}\,(x)}{1 + \cos\,(x)}$ e $g(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{x}$. Utilizando a propriedade do limite do produto, temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} h(x) \cdot \lim_{x\to 0} g(x) \\
&= \left[\lim_{x\to 0} \frac{3\,\text{sen}\,(x)}{1+\cos\,(x)}\right] \cdot \left[\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x}\right] \\
&= 0 \cdot 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{3(1-\cos(x))}{x} = 0$$

(d) $\lim_{x\to 4^+} \frac{|x-4|}{x-4}$.

Solução: Consideremos $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$. Verificando o domínio, temos que $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$. Utilizando a propriedade de módulo, temos que

$$|x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{se} \quad x \geq 4 \\ -x+4, & \text{se} \quad x < 4 \end{cases}$$

Como $x = 4$ não pertence ao domínio, então $f(x)$ será

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 4 \\ -1, & \text{se} \quad x < 4 \end{cases}$$

Como x está se aproximando de 4 pela direita, ou seja, valores maiores que 4, temos que $f(x) = 1$, logo,

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 1 = 1$$

2.3

(a) Verifique se o Teorema do valor intermediário se aplica para $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, $[0, 3]$, $f(c) = 0$;

Solução: Seja $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$.

$$f(0) = 0^3 - 0^2 + 0 - 2 = -2 < 0$$

$$f(3) = 3^3 - 3^2 + 3 - 2 = 19 > 0$$

Logo, $f(0) < 0 < f(3)$, isto é, $k = 0$ é um número entre $f(0)$ e $f(3)$. Como f é contínua, uma vez que é um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 0 e 3 tal que $f(c) = 0$. Em outras palavras, a equação $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, tem pelo menos uma raiz c no intervalo $[0, 3]$.

(b) Descreva um processo para calcular uma aproximação do número c dado no item (a) e calcule uma aproximação de c.

Solução: Podemos localizar com mais precisão a raiz usando o teorema do Valor Intermedário recursivamente. Para isso, precisamos escolher pontos de tal forma a diminuir o intervalo, fazendo a e b tender ao valor c, de forma que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Observe que $f(0) = -2 < 0$ e $p(3) = 19 > 0$ logo, pelo TVI, existe uma raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[0, 3]$. Considere o ponto médio de $[0, 3]$ dado por $x_1 = 1.5$. Como $f(1.5) = 0.625$ temos, pelo TVI, que existe uma raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[0, 1.5]$.

Considere o ponto médio de $[0, 1.5]$ dado por $x_2 = 0.75$.. Como $f(0.75) = -1.39$ temos, pelo TVI, que existe uma raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[0.75, 1.5]$.

Considere o ponto médio de $[0.75, 1.5]$ dado por $x_3 = 1.125$ e note que $f(1.125) = -0.717$. Logo, pelo TVI existe uma raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[1.125, 1.5]$.

Novamente considere o ponto médio de $[1.125, 1.5]$ dado por $x_4 = 1.3125$ e note que $f(1.3125) = -0.1492$. Logo, pelo TVI existe uma raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[1.1492, 1.5]$.

Podemos continuar esse processo até que uma condição de parada seja satisfeita. Por exemplo, o erro relativo seja menor que uma precisão dada. Assim,

$$\text{erro} = \frac{|1.3125 - 1.125|}{1.3125} = 0.1429$$

Portanto, $x \approx 1.3125$ é uma raiz aproximada da equação $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2 = 0$.

2.4 Encontre os valores reais de x (se houver algum) para os quais a função f não é contínua. Existe alguma descontinuidade removível? Qual ou quais?

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$;

Solução: Vamos analisar primeiramente o domínio de $f(x)$. Temos que $x^2 - x \neq 0$, logo, $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Logo, o domínio de f é $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Como f não está definida em $x = 0$ e $x = 1$, logo, f não será contínua nesses pontos.

Por sua vez, dizemos que f possui descontinuidade removível em a quando existe $\lim_{x \to a} f(x)$, mas $f(x)$ não está definida em a. Logo, para verificar se a função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$ possui descontiuidade removível, precisamos verificar se o limite dela quando x tende aos valores em que ela não está definido, existe.

Assim, calculando o limite quando x tende a 0, temos,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2 - x}.$$

Para $x \neq 0$ é valido que

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x} = \frac{1}{x - 1}.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x - 1} = -1.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2 - x} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2 - x} = +\infty.$$

Logo, $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

Portanto, concluímos que há descontinuidade removível em $x = 0$, porém não há em $x = 1$.

(b) $f(x) = \dfrac{|x + 5|}{x + 5}$.

Solução: Vamos analisar primeiramente o domínio de $f(x)$. Temos que $x + 5 \neq 0$, logo, $x \neq -5$. Logo, o domínio de f é $D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$. Utilizando a propriedade de módulo, temos que

$$|x + 5| = \begin{cases} x + 5, & \text{se} \quad x \geq -5 \\ -x - 5, & \text{se} \quad x < -5 \end{cases}$$

Como $x = -5$ não pertece ao domínio, então $f(x)$ será

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > -5 \\ -1, & \text{se} \quad x < -5 \end{cases}$$

Calculando os limites laterais

$$\lim_{x \to -5^+} f(x) \neq \lim_{x \to -5^-} .$$

Logo, $\lim_{x \to -5} f(x)$ não existe, e portanto, a função não possui descontinuidade removivel.

2.5 Seja $s(t) = t^3 + t^2$ a função posição do deslocamento de um móvel.

(a) Encontre as velocidades médias do móvel nos intervalos de tempo $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, $\Delta t_2 = t_2 - t_1$, $\Delta t_3 = t_3 - t_2$ e $\Delta t_4 = t_4 - t_3$ para $t_0 = 0$, $t_1 = 0.5$, $t_2 = 1.0$, $t_3 = 1.5$ e $t_4 = 2.0$;

Solução: Temos que a velocidade média é calculada pela variação de espaço dividida pela variação do tempo.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i}$$

Para o intervalo Δt_1;

$$v_1 = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{s(0,5) - s(0)}{0,5 - 0} = \frac{0,375 - 0}{0,5 - 0} = 0,75 \quad \text{m/s}.$$

Para o intervalo Δt_2;

$$v_2 = \frac{s(1) - s(0,5)}{1 - 0,5} = \frac{2 - 0,375}{1 - 0,5} = 3,25 \quad \text{m/s}.$$

Para o intervalo Δt_3;

$$v_3 = \frac{s(1,5) - s(1)}{1,5 - 1} = \frac{5,625 - 2}{1,5 - 1} = 7,25 \quad \text{m/s}.$$

Para o intervalo Δt_4;

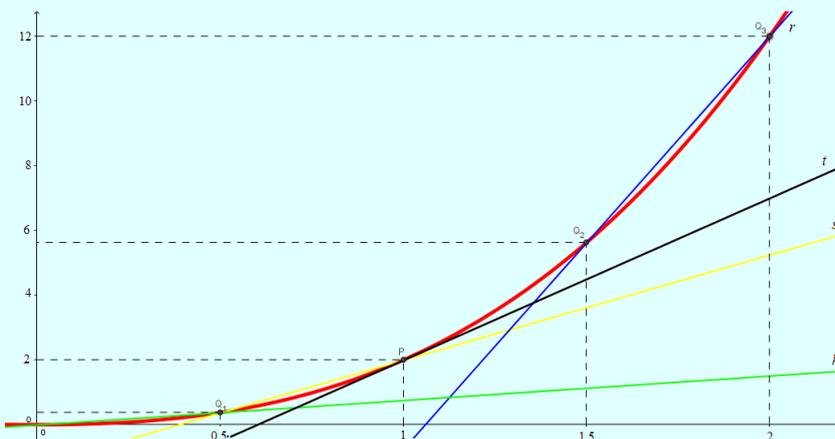
$$v_4 = \frac{s(2) - s(1,5)}{2 - 1,5} = \frac{12 - 5,625}{2 - 1,5} = 12,75 \quad \text{m/s}.$$

(b) Faça uma interpretação geométrica da velocidade instântanea no instante $t = 1$ usando as velocidades médias;

Solução: Temos que a velocidade média é o coeficiente angular da secante a curva em $(t_1, s(t_1))$ e $(t_2, s(t_2))$. Sendo assim, pode ser calculada como a varição do espaço $(\Delta s = s(t_2) - s(t_1))$ dividido pelo tempo gasto para percorrer essa mesmo distância $(\Delta t = t_2 - t_1)$.

$$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Quando t_2 se aproxima de t_1, isto é, o intervalo de tempo Δt tende a zero esperamos que a velocidade média aproxime-se de um valor $v(t_1)$, chamado de velocidade instatânea. Geometricamente, temos que a velocidade instantânea será o coeficiente angular da reta tangente no ponto $t = t_1$.

Logo, a velocidade instantânea em $t = 1$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $s(t)$ no ponto $(1, 2)$.

(c) Use os resultados dos itens (a) e (b) para estimar a velocidade instântanea em $t = 1$;

Solução: Para estimar o valor da velocidade instantânea em $t = 1$, observe que, pelo item (a), esperamos que as velocidades médias nos intervalos de tempo $\Delta t = |t - 1|$ suficientemente pequenos com (ou seja, quando t tende para 1) "aproximem-se" da velocidade instantânea em $t = 1$.

Usando os resultados do item (b) e a ideia descrita acima, podemos aproximar a velocidade instantânea em $t = 1$ pelas velocidades médias calculadas para t suficientemente próximo de $t = 1$. Assim, temos que $t_2 = 0.5$ e $t_3 = 1.5$ são os instantes mais próximos de $t = 1$. Logo, podemos escolher v_2 ou v_3 como uma aproximação da velocidade instantânea $v(1)$. Por exemplo,

$$v(1) \approx v_3 = 7,25.$$

(d) Descreva como você pode melhorar a aproximação da velocidade instântanea dada no item (c).

Solução: Podemos melhorar a aproximação da velocidade instantânea $v(1)$ calculando velocidades médias para intervalos de tempo $\Delta t = t - 1$, com $t > 1$, cada vez menores, ou seja, para instantes suficientemente próximos de $t = 1$.

Por exemplo, subdividindo o intervalo $[1, 2]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ com tamanho $h = 1/n$ e $1 \leq i \leq n$ obtemos os instantes $t_i = 1 + h\, i$ suficientemente próximos de $t = 1$.

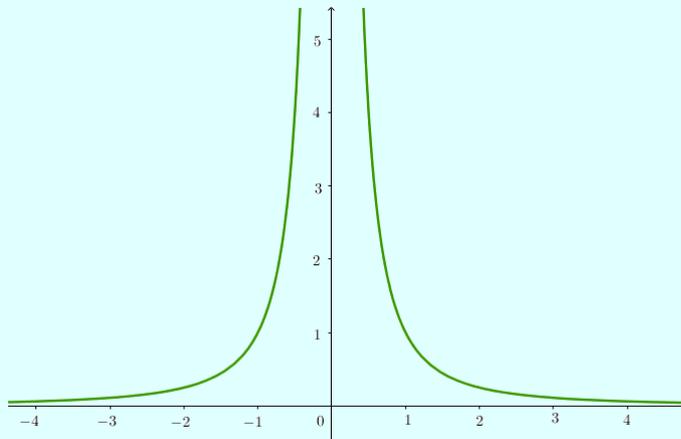
Assim, para $n = 10$, $\Delta t_i = t_i - 1$, $\Delta s_i = s(t_i) - 2$ e $v_i = \dfrac{\Delta s_i}{\Delta t_i}$ obtemos

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
Δt_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Δs_i	0.541	1.168	1.887	2.704	3.625	4.656	5.803	7.072	8.469	10.0
v_i	5.41	5.84	6.29	6.76	7.25	7.76	8.29	8.84	9.41	10.0

O instante mais próximo de $t = 1$ é $t_1 = 1.1$ e, logo, uma aproximação velocidade instântanea $v(1)$ é a velocidade média v_1, ou seja, $v(1) \approx 5.41$. Observe que esta aproximação é melhor do que a aproximação dada no item (c).

2.6 Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e faça o que se pede:

(a) Utilizando um aplicativo computacional investigue o gráfico da função f. Depois, faça um desenho à mão livre do mesmo gráfico.

Solução: Esboçando o gráfico da função temos.

(b) Analise o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela direita. O que podemos afirmar sobre o valor do limite $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$?

Solução: Através da análise do gráfico, quando x tende para zero pela direita, $f(x)$ assume valores positivos cada vez maiores, isto é,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

(c) Analise agora, o valor de $f(x)$ quando x se aproxima de 0 pela esquerda. O que podemos afirmar sobre o valor do limite $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$?

Solução: Através da análise do gráfico, quando x tende para zero pela esquerda, $f(x)$ assume valores positivos cada vez maiores, isto é,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$$

(d) O limite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe? Justifique.

Solução: Não existe, pois

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

e não existe um número real finito que atenda a definição de limite, sendo o símbolo $+\infty$ apenas uma representação para o crescimento da função quando x se aproxima de 0.

2.7 Determine todas as assíntotas (verticais, horizontais e oblíquas) da função $f(x) = x + \frac{3}{x}$.

Solução: Temos que

$$f(x) = x + \frac{3}{x} = \frac{x^2+3}{x},\ x \neq 0.$$

Assim, calculando o limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+3}{x}$$

temos que quando x tende a 0 por valores positivos, o numerador x^2+3 tende a 3, isto é

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+3}{x} = +\infty$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3}{x} = -\infty.$$

Logo, $x = 0$ é assíntota vertical.

Agora, calculando o limite seguinte utilizando L'Hôspital

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+3}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x}{1} = \pm\infty$$

isto é, o limite não existe e f não possui assíntotas horizontais.

Para obtermos as assíntotas oblíquas $y = mx + h$, consideremos

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - (mx+h)] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2+3}{x} - (mx+h)\right] = 0$$

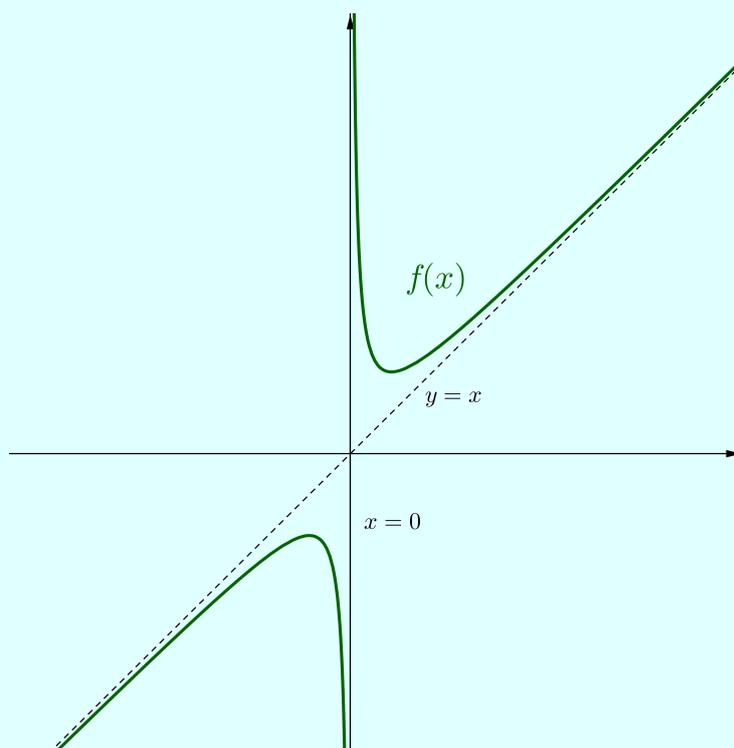
onde

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Observe também que quando $x \to -\infty$, $m = 1$.

Então,

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2+3}{x} - (x+h) \right] = 0 \Rightarrow h = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

Logo, a reta $y = x$ é assíntota oblíqua de f. Veja o gráfico:

Derivadas

Plano

Tópicos abordados nos exercícios.

- Definição de derivada;
- Equação da reta tangente e linearização;
- Regras de derivação;
- Primitivação;

Conteúdos essenciais para resolução dos exercícios.

- Limite e suas propriedades;
- Regra de L'Hospital;
- Regra da cadeia e derivação implícita;
- Primitiva de uma função;

Métodos e Técnicas

Regra de L'Hospital

- Nas questões citadas verifica-se o uso correto da regra de L'Hospital:

Exercícios 3.6; 3.8; 3.21

Regra da Cadeia e/ou Derivação Implícita

- Nas questões citadas usa-se a regra da cadeia e/ou considera-se y uma função implícita de x:

Exercícios 3.4(a); 3.4(b); 3.5; 3.7

Primitivação

- Nas questões citadas efetua-se a primitivação para encontrar o valor da função:

Exercícios 3.5; 3.7

●●○○

3.1 Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10m/s, sua altura, em metros, t segundos mais tarde, será dada por $s(t) = 10t - 1,86t^2$.

(a) Calcule sua velocidade média nos intervalos de tempo $[2; 2,2]$, $[2; 2,1]$, $[2; 2,01]$ e $[2; 2,001]$;

(b) Defina velocidade instantânea;

(c) Estabeleça uma estimativa para a velocidade instantânea em $t = 2s$.

●●●○

3.2 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa dê um contra-exemplo.

(a) Se $\lim_{x \to c} f(x) = L$ então $f(c) = L$;

(b) Se f é uma função derivável em $x = c$ então f é contínua em $x = c$;

(c) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função derivável f no ponto $(a, f(a))$ é dado por $\dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

(d) A função $f(x) = |x|$ é contínua e derivável em $x = 0$.

●●●●

3.3 Verifique que a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) possui equação $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

●●●●

3.4 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, explique; se for falso explique ou dê contra-exemplo.

(a) A derivada de uma função par é sempre par;

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par;

(c) A função

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$, mas não é derivável em $x = 0$.

(d) Na Física, a velocidade média é uma aplicação do conceito de derivada.

●●●○

3.5 Um funil cônico tem diâmetro de $20\,cm$, na parte superior e altura de $30\,cm$. Se o funil é alimentado à uma taxa de $2,5 l/s$ e tem uma vazão de $500\,cm^3/s$, determine quão rapidamente está subindo o nível da água, quando esse nível é de $22,5\,cm$.

●●●○

3.6 Considere os seguintes limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3} \qquad (ii)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\ln\, x}\right)$$

$$(iii)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \sec 5x$$

(a) Verifique em quais dos limites acima é possível utilizar a regra de L'Hospital e justifique sua escolha em cada um deles;

(b) Calcule os limites acima.

●●●○

3.7 Uma pipa a $40\,m$ acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de $1,5\,m/s$. A que taxa decresce o ângulo entre a linha e a horizontal depois de $100\,m$ de linha serem soltos?

●●●○

3.8 Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{y^4-3y^2+y}{y^3-y+2}$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 5^+} \frac{e^t}{(t-5)^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{z\to 0} (\cos z)^{1/z^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{w\to 0^+} \left(\frac{1}{w}\right)^{\operatorname{tg} w}$

●●●○

3.9 Sobre o Teorema do Valor Médio, faça o que se pede:

(a) Enuncie o Teorema do Valor Médio.

(b) Explique as interpretações geométrica e cinemática do Teorema do Valor Médio.

(c) Determine os valores $c \in (a, b)$ tais que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

em que $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $a = -3$ e $b = -1$.

●●○○

3.10 Determine os extremos absolutos, caso existam, da função $f(t) = t + \operatorname{cotg}\left(\dfrac{t}{2}\right)$ no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

●●●●

3.11 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

(a) O máximo de uma função que é contínua num intervalo fechado pode ocorrer em dois valores diferentes no intervalo;

(b) Se $x = c$ é um número crítico da função f, então também é um número crítico da função $g(x) = f(x-k)$ com k uma constante;

(c) Se o gráfico de uma função polinomial intercepta o eixo x em três pontos, então ele deve ter pelo menos dois pontos nos quais a reta tangente é horizontal;

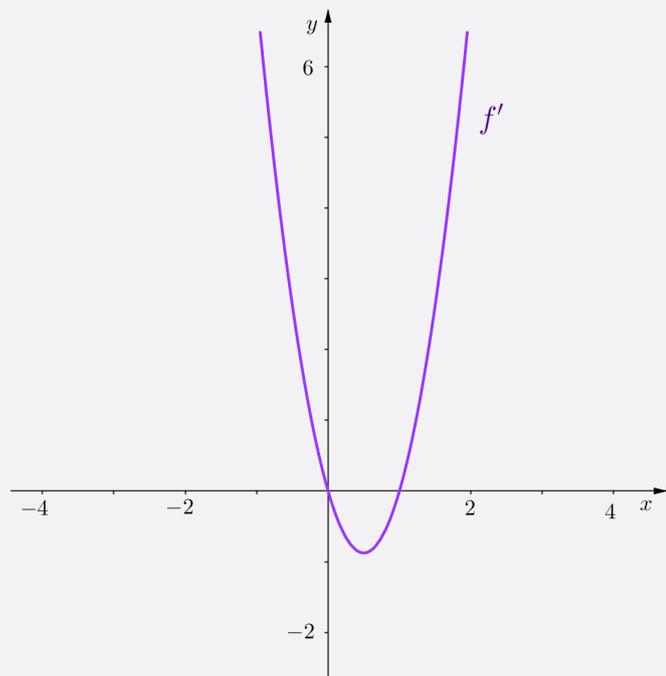
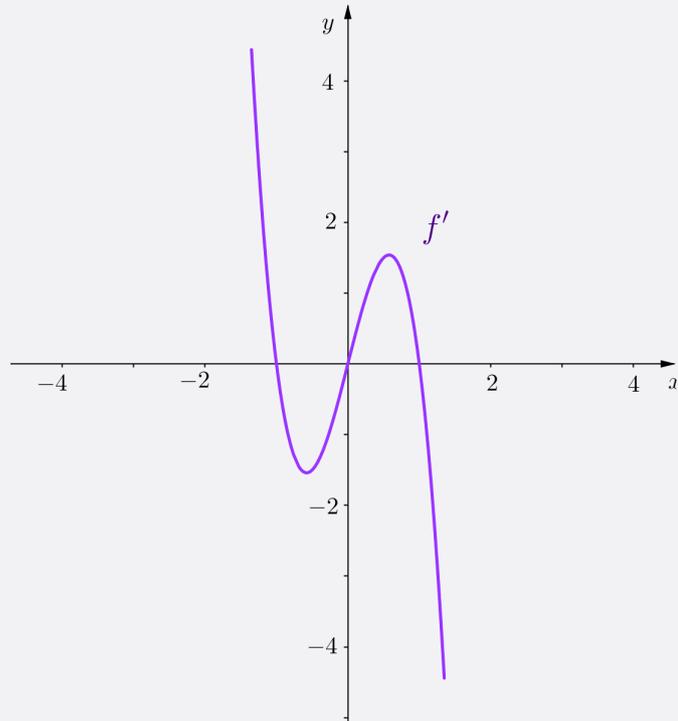
(d) Se $0 < a < b$ então $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \dfrac{b-a}{2\sqrt{2}}$.

●●●●

3.12 Às 8 horas, um trem começa a se deslocar para percorrer um trajeto de 600 Km. O trem chega ao seu destino às 11h30min. Explique por que existem pelo menos dois instantes durante o trajeto em que a velocidade do trem é de 80 Km/h.

●●●○

3.13 Para os itens (a) e (b), use o gráfico de f' para (i) identificar o(s) intervalo(s) para os quais f é crescente ou decrescente; (ii) estimar o(s) valor(es) de x tais que f atinge um máximo ou um mínimo.

(a)

(b)

●●●○

3.14

(a) Dê exemplo que uma função f que não tem ponto de inflexão em $(c, f(c))$, mas $f''(c) = 0$. Esboce o gráfico de f;

(b) Verifique que o polinômio cúbico $p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ tem exatamente um ponto de inflexão (x_0, y_0) com

$$x_0 = -\frac{b}{3\,a};$$

$$y_0 = \frac{2\,b^3}{27\,a^2} - \frac{b\,c}{3\,a} + d.$$

●●○○

3.15 Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x}$ e determine seus extremos locais, caso existam. Lembre de justificar a classificação dos extremos utilizando os resultados aprendidos.

●●○○

3.16 Estude a concavidade da função da questão anterior, determinando os pontos de inflexão, caso existam.

●●○○

3.17 Considere uma folha de papelão retangular medindo um metro de comprimento por oitenta centímetros de largura. Retirando dos quatro cantos um quadrado de lado x, determine o valor de x de modo que tenhamos uma caixa, obtida quando dobramos os lados já com os quadrados retirados, de máximo volume.

●●●○

3.18 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, explique. Se for falso, explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Os pontos de inflexão de uma função contínua sempre são as raízes da segunda derivada;

(b) Nem todo ponto crítico é extremo local.

(c) O Teste da Segunda Derivada nos mostra como determinar os pontos de inflexão de uma função;

(d) O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo em um ponto p no domínio de uma função f se $f''(p) = 0$.

●●●●

3.19 Considere a função: $g(x) = x^3 + x^2$.

(a) Determine o domínio de g;

(b) Verifique se g é par ou ímpar;

(c) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de g, bem como os seus extremos relativos, caso existam. Justifique a classificação dos mesmos utilizando o Teste da Primeira Derivada ou o Teste da Segunda Derivada.

(d) Estude a concavidade de g e seus pontos de inflexão, caso existam.

(e) Calcule os limites

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \text{ e } \lim_{x\to-\infty} g(x)$$

e as assíntotas de g, caso existam.

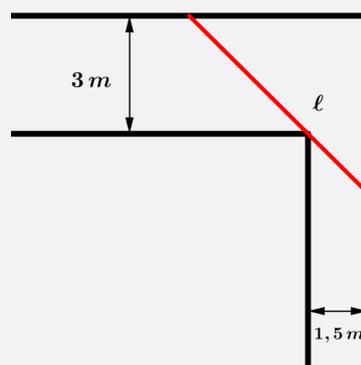
(f) Determine as raízes e o ponto de intersecção de g com o eixo y.

(g) Utilize as informações dos itens anteriores para esboçar o gráfico da função g.

●●●●

3.20 Dois corredores de largura $3\,m$ e $1,5\,m$, encontram-se em ângulo reto como indica a figura abaixo:

Seja ℓ o comprimento máximo de uma viga que pode passar horizontalmente de um corredor para o outro. Determine o valor de ℓ.

●●●●

3.21 Esboce o gráfico da função $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x \ln x^2$, indicando seus respectivos domínio, simetria, intersecções com eixos coordenados, intervalos de crescimento/decrescimento, concavidade, extremos locais, pontos de inflexão e assíntotas, quando existirem.

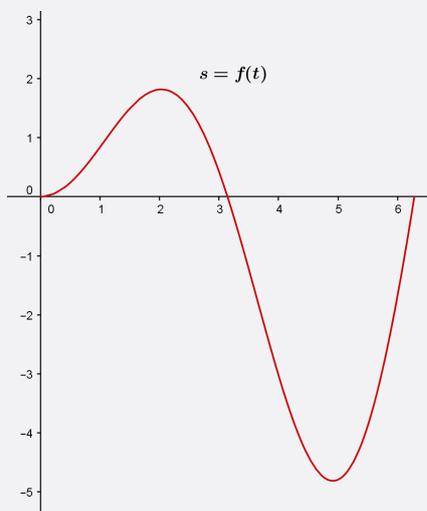
●●●○

3.22 Cada um dos itens abaixo possui o gráfico de uma função posição $s = f(t)$ de um corpo que se desloca ao longo de um eixo coordenado. Para cada um deles, determine:

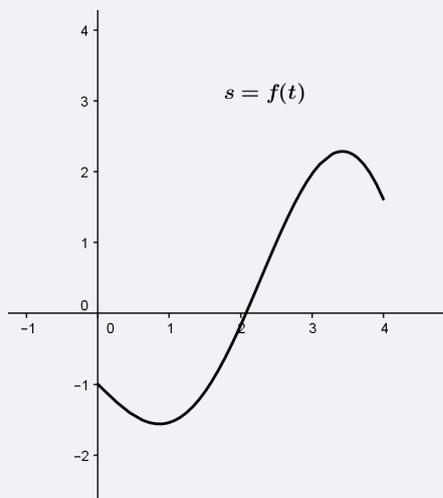
(I) O instante t aproximadamente, se houver, em que o corpo apresenta velocidade e/ou aceleração igual a zero.

(II) Os intervalos aproximados em que o corpo se move para frente ou para trás.

(III) Os intervalos aproximados em que a aceleração foi positiva ou foi negativa.

(a)

(b)

●●○○

3.23

(a) Defina primitiva de uma função contínua f.

(b) Em cada item abaixo, serão dadas duas funções $F(x)$ e $f(x)$. Utilize as técnicas de derivação para verificar se a função F é uma primitiva da função f

(I) $F(x) = x^7 + 8$ e $f(x) = x^6$;

(II) $F(x) = x^4 - 3x^3 + x + 2$ e $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$;

(III) $F(x) = \dfrac{(4x-7)^3}{12} + 5$ e $f(x) = (4x-7)^2$;

(IV) $F(x) = 2 - \dfrac{\cos(3x-5)}{3}$ e $f(x) = \operatorname{sen}(3x-5)$.

Sugestões

3.1 Use a definição de velocidade instantânea.

3.2 Use uma função por partes como contra-exemplo.

3.3 Derive implicitamente a equação da elipse.

3.4 Lembre que uma função é par se $f(-x) = f(x)$ e é impar se $f(-x) = -f(x)$.

3.5 Use semelhança de triângulos para relacionar raios e alturas.

3.6 Verifique se há indeterminação do tipo $0/0$ ou ∞/∞.

3.7 Use a definição de cosseno e teorema de Pitágoras no triângulo retângulo que representa a trajetória da pipa.

3.8 Faça

$$(\cos z)^{1/z^2} = e^{\frac{1}{z^2}\ln(\cos z)}$$

e

$$\left(\frac{1}{w}\right)^{\operatorname{tg} w} = e^{\operatorname{tg} w \ln\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

3.9 Aplique diretamente o TVM.

3.10 Encontre os pontos críticos que pertençam ao intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ fazendo $f'(t) = 0$.

3.11 Tome

$$\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

e use o TVM.

3.12 Use o TVM.

3.13 Lembre-se que f é crescente nos intervalos em que $f' > 0$ e decrescente nos intervalos em que $f' < 0$.

3.14 Faça $p''(x_0) = 0$ e use o teste da segunda derivada.

3.15 Identifique as restrições no domínio de f e estude o sinal de f'.

3.16 Estude o sinal de f''.

3.17 Considere x a altura, $100 - x$ o comprimento da base e $80 - x$ a altura da base da caixa.

3.18 Use $\sqrt[3]{x}$ e x^3 como contra-exemplo.

3.19 Estude o sinal de f' e f''.

3.20 Considere dois triângulos retângulos cuja soma de suas hipotenuas é o comprimento l.

3.21 Analise as restrições no domínio de f e g.

3.22 Lembre-se que a função posição é a primitiva da função velocidade, e por sua vez, a função velocidade é a primitiva da função aceleração. Estude o sinal destas funções.

3.23 Derive $F(x)$.

Respostas

3.1 Se uma pedra for jogada para cima no planeta Marte com velocidade de 10m/s, sua altura, em metros, t segundos mais tarde, será dada por $s(t) = 10t - 1,86t^2$.

(a) Calcule sua velocidade média nos intervalos de tempo $[2; 2,2]$, $[2; 2,1]$, $[2; 2,01]$ e $[2; 2,001]$;

Solução: Temos que a velocidade média é calculada pela variação de espaço dividida pela variação do tempo.

$$V_m = \frac{S(t_f) - S(t_i)}{t_f - t_i}$$

Onde:

t_f - tempo final;

t_i - tempo inicial.

Para o intervalo $[2; 2,2]$

$$V_m = \frac{S(t_f) - S(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{S(2,2) - S(2)}{2,2 - 2} = \frac{12,9976 - 12,56}{2,2 - 2} = 2,188 \quad \text{m/s.}$$

Para o intervalo $[2; 2,1]$

$$V_m = \frac{S(2,1) - S(2)}{2,1 - 2} = \frac{12,7974 - 12,56}{2,1 - 2} = 2,374 \quad \text{m/s.}$$

Para o intervalo $[2; 2,01]$

$$V_m = \frac{S(2,01) - S(2)}{2,01 - 2} = \frac{12,5854 - 12,56}{2,01 - 2} = 2,541 \quad \text{m/s.}$$

Para o intervalo $[2; 2,001]$

$$V_m = \frac{S(2,001) - S(2)}{2,001 - 2} = \frac{12,5626 - 12,56}{2,001 - 2} = 2,558 \quad \text{m/s.}$$

(b) Defina velocidade instantânea;

Solução: A velocidade instatânea será obtida quando a diferença entre o tempo final e o inicial tender a zero, assim, $\Delta t = t_f - t_i \Rightarrow t_f = t_i + \Delta t$.

$$V_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{\Delta t}$$

(c) Estabeleça uma estimativa para a velocidade instantânea em $t = 2s$.

Solução: Calculando a velocidade instantânea em $t_i = 2$, temos que

$$\begin{aligned}
V_{inst} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(2 + \Delta t) - S(2)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10(2 + \Delta t) - 1,86(2 + \Delta t)^2 - 10 \cdot 2 + 1,86 \cdot 2^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10\Delta t - 1,86 \cdot 4\Delta t + 1,86\Delta t^2}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} 10 - 1,86 \cdot 4 + 1,86\Delta t \\
&= 2,56 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

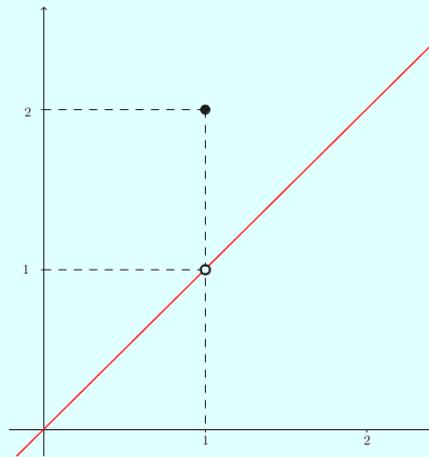
Logo, a velocidade instantânea em $t = 2$ é $V_{inst} = 2,56$ m/s.

3.2 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa dê um contra-exemplo.

(a) Se $\lim_{x \to c} f(x) = L$ então $f(c) = L$;

Solução: Falso! Podemos definir uma função $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 2, & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Graficamente, temos

Assim,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x = 1$$

Porém, $f(1) = 2$, logo, a proposição é falsa!

(b) Se f é uma função derivável em $x = c$ então f é contínua em $x = c$;

Solução: Verdadeira, é um teorema do cálculo.

(c) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função derivável f no ponto $(a, f(a))$ é dado por $\dfrac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

Solução: Falso! A equação é usada para encontrar o coeficiente angular da reta secante que passa por $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, pois $\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x$, então

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m_s.$$

(d) A função $f(x) = |x|$ é contínua e derivável em $x = 0$.

Solução: Falso! Observe que f é contínua em $x = 0$, pois pela definição de módulo, temos que

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0^-} f(x) = f(0) = 0.$$

Mas, f não é derivável em $x = 0$. De fato, seja

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Assim,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Fazendo $g(h) = \dfrac{|h|}{h}$ e usando a definição de módulo obtemos

$$|h| = \begin{cases} h, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -h, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Como $h = 0$ não está no domínio de $g(h)$, então

$$g(h) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calculando os limites laterais encontramos que

$$\lim_{h \to 0^+} g(h) = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1;$$

$$\lim_{h \to 0^-} g(h) = \lim_{h \to 0^-} -1 = -1.$$

Como $\lim_{h \to 0^+} g(h) \neq \lim_{h \to 0^-} g(h)$ concluímos que $\lim_{h \to 0} g(h)$ não existe. Portanto, f não é derivável em $x = 0$.

3.3 Verifique que a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ no ponto (x_0, y_0) possui equação $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Solução: Lembrando inicialmente da equação geral da reta, temos que

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Analisando a questão, observamos que já é fornecido um ponto genérico (x_0, y_0), logo, será necessário apenas encontrar o coeficiente angular da reta tangente no ponto dado. Relembrando que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente em um ponto (x, y) pertencente ao domínio da curva, basta derivarmos a função $y = y(x)$ definida implicitamente por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Utilizando derivada implícita,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) &= \frac{d}{dx}(1)\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{b^2}\right) &= 0\\
\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} &= 0\\
\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} &= -\frac{2x}{a^2}\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{b^2x}{a^2y}
\end{aligned}$$

Logo, m em (x_0, y_0) é dado $m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$. Substituindo na equação da reta,

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0)\\
y - y_0 &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)\\
\frac{y_0(y-y_0)}{b^2} &= \frac{x_0(x-x_0)}{a^2}\\
\frac{yy_0}{b^2}+\frac{xx_0}{a^2} &= \frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}
\end{aligned}$$

Note que para um ponto (x_0, y_0) pertencente à elipse, $\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}=1$. Logo,

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

3.4 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, explique; se for falso explique ou dê contra-exemplo.

(a) A derivada de uma função par é sempre par;

Solução: Falsa! Pela definição, uma função é par se $f(x) = f(-x)$. Podemos, por exemplo, utilizar a função par igual a $f(x) = x^2$. Derivando, encontramos que $f'(x) = 2x$, que por sua vez é uma função ímpar.

Podemos explicar utilizando a regra da cadeia. Como já dito, uma função é par se $f(x) = f(-x)$. Logo,

$$f'(x) = [f(-x)]'$$

Partindo disso, podemos utilizar a regra da cadeia, assim,

$$[f(-x)]' = [f'(-x)](-x)' = -f'(-x)$$

Logo, concluimos que a derivada de uma função par é uma função impar, pois,

$$-f'(x) = f'(-x)$$

ou seja, a derivada de uma função par será sempre ímpar.

(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par;

Solução: Verdadeira! Uma função é dita ímpar se $f(x) = -f(-x)$. Partindo disso,

$$f'(x) = [-f(-x)]'$$

Utilizando a regra da cadeia,

$$[-f(-x)]' = [-f'(-x)](-x)' = f'(-x)$$

Logo, a derivada de uma função ímpar é par.

(c) A função

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$, mas não é derivável em $x = 0$.

Solução: Verdadeira! Uma função é contínua em $x = a$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Primeiramente precisamos mostrar se a função é contínua em $x = 0$, para isso, vamos calcular o $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Por sua vez, temos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Multiplicando por x em todos os termos, temos

$$-x \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

Logo, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Logo, a função é contínua em $x = 0$. Precisamos agora verificar se a função é derivável em $x = 0$. Para isso, utilizaremos a definição.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \end{aligned}$$

Como o limite $\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$ não existe, logo, f não é derivável em $x = 0$.

(d) Na Física, a velocidade média é uma aplicação do conceito de derivada.

Solução: Falsa! Seja $x = f(t)$ uma equação horária do movimento de uma partícula sobre a reta real x. Então $f(t)$ descreve a posição da partícula no instante t, para cada $t \in \mathbb{R}$. Da Física, sabemos que a **velocidade média** de uma partícula entre os instantes t_0 e t é dada pelo quociente da distância percorrida pelo tempo decorrido, isto é

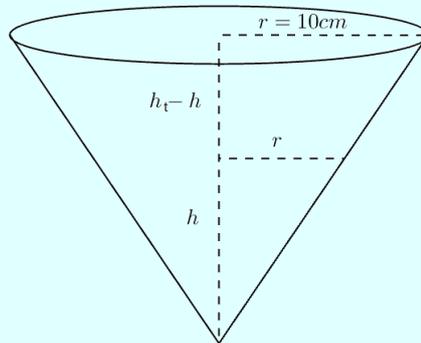
$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

e a **velocidade instantânea** da partícula no instante t_0 é dada por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Logo, a velocidade instantânea é o limite, quando $t \to t_0$, das velocidades médias da partícula entre os intantes t_0 e t.

3.5 Um funil cônico tem diâmetro de $20\,cm$, na parte superior e altura de $30\,cm$. Se o funil é alimentado à uma taxa de $2,5l/s$ e tem uma vazão de $500\,cm^3/s$, determine quão rapidamente está subindo o nível da água, quando esse nível é de $22,5\,cm$.

Solução: Considere a figura abaixo:

Por semelhança de triângulos, temos

$$\frac{30}{h} = \frac{10}{r} \Rightarrow r = \frac{h}{3}.$$

Logo,

$$V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^3}{27} \quad \text{e} \quad \frac{dV}{dh} = \frac{\pi h^2}{9}.$$

Por outro lado,

$$\frac{dV}{dt} = (2500 - 500)\,\text{cm}^3/\text{s} = 2000\,\text{cm}^3/\text{s}.$$

Então, como $V(h) = V(h(t))$, segue da regra da cadeia que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{9}\frac{dh}{dt}$$

isto é,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Quando $h = 22,5$ cm,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{\pi(22,5)^2} \cdot 2000 \approx 11,32\,\text{cm/s}.$$

3.6 Considere os seguintes limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3} \qquad (ii)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\ln\,x}\right) \qquad (iii)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \sec 5x$$

(a) Verifique em quais dos limites acima é possível utilizar a regra de L'Hospital e justifique sua escolha em cada um deles;

Solução: Para verificarmos quais dos limites acima é possível utilizar a regra de L'Hospital, precisamos mostrar se aparecem as inderterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$(i)\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

Seja $f(x) = \operatorname{senh} x - x$ e $g(x) = x^3$. Calculando o limite, temos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{senh} x - x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

Logo, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$, ou seja, é possível utilizar a regra de L'Hospital.

$(ii)\ \displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\ln\,x}\right)$

Seja

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\ln\,x}\right) \\ &= \frac{x\ln\,x - 2(x-1)}{(x-1)\ln\,x} \\ &= \frac{x\ln\,x - 2x + 2}{(x-1)\ln\,x} \end{aligned}$$

Fazendo $f(x) = x \ln x - 2x + 2$ e $g(x) = (x-1)\ln x$,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x \ln x - 2x + 2) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}[(x-1)\ln x] = 0$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{\ln x}\right) = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, ou seja, é possível utilizar a regra de L'Hospital.

(iii) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \sec 5x$

Seja $h(x) = \cos x \sec 5x = \dfrac{\cos x}{\cos 5x}$. Fazendo $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \cos 5x$,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos 5x = 0$$

Logo, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \sec 5x = \left[\dfrac{0}{0}\right]$, ou seja, é possível utilizar a regra de L'Hospital.

(b) Calcule os limites acima.

Solução:
(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

Aplicando a regra de L'Hospital, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{senh} x - x)'}{(x^3)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{3x^2} \\ &= \left[\frac{0}{0}\right]. \end{aligned}$$

Verifica-se que ainda existe a indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, logo, aplica-se a regra de L'Hospital novamente. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\cosh x - 1)'}{(3x^2)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{6x} \\ &= \left[\frac{0}{0}\right]. \end{aligned}$$

Como ainda existe a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, logo, aplica-se a regra de L'Hospital novamente. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{senh} x)'}{(6x)'}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{6}\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{6} = \frac{1}{6}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\ln\, x}\right)$

Seja

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\ln\, x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln\, x - 2x + 2}{(x-1)\ln\, x}$$

Aplicando a regra de L'Hospital, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x\ln\, x - 2x + 2}{(x-1)\ln\, x} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x\ln\, x - 2x + 2)'}{[(x-1)\ln\, x]'}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\, x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 2}{\ln\, x + \frac{1}{x}(x-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\, x - 1}{\ln\, x + 1 - \frac{1}{x}}\\ &= \left[\frac{-1}{0}\right].\end{aligned}$$

Analisando, percebemos que quando x tende para 1, obtemos a indeterminação do tipo $\frac{k}{0}$, não sendo mais possível utilizar a regra de L'Hospital. Para resolver, utilizaremos os limites laterais. Assim,

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln\, x - 1}{\ln\, x + 1 - \frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln\, x - 1}{\ln\, x + 1 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

Como os limites laterais são diferentes, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{\ln\, x}\right)$ não existe.

(iii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos\, x \sec\, 5x$

Seja

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos\, x \sec\, 5x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos\, x}{\cos\, 5x}$$

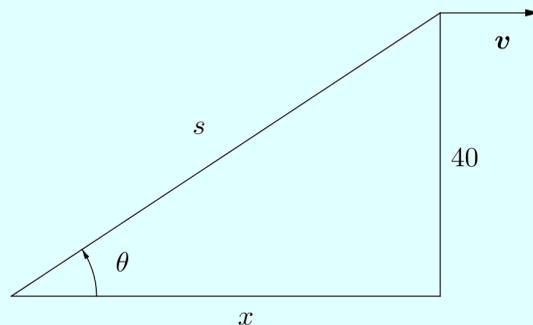
Aplicando a regra de L'Hospital, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos\, x}{\cos\, 5x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{(\cos\, x)'}{(\cos\, 5x)'} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\text{sen}\, x}{-5\,\text{sen}\, 5x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{sen}\, x}{5\,\text{sen}\, 5x} \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos\, x \sec\, 5x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{sen}\, x}{5\,\text{sen}\, 5x} = \frac{1}{5}$$

3.7 Uma pipa a $40\,m$ acima do solo move-se horizontalmente a uma velocidade de $1,5\,m/s$. A que taxa decresce o ângulo entre a linha e a horizontal depois de $100\,m$ de linha serem soltos?

Solução: Considere a figura abaixo:

Note que

$$\cos\theta = \frac{x}{s} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{x}{s}\right).$$

Como $s^2 = x^2 + 40^2$, escrevemos o ângulo $\theta = \theta(t)$ em termos de $x = x(t)$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 40^2}}\right).$$

Então, utilizando a regra da cadeia temos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\frac{dx}{dt}. \tag{3}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+40^2}}\right)^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+40^2}}\right)' \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{x^2+40^2}}}\left[\frac{\sqrt{x^2+40^2}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+40^2}}}{(\sqrt{x^2+40^2})^2}\right] \\
&= -\frac{\cancel{\sqrt{x^2+40^2}}}{40}\left[\frac{x^2+40^2-x^2}{(x^2+40^2)\cancel{\sqrt{x^2+40^2}}}\right] \\
&= -\frac{40}{x^2+40^2}.
\end{aligned}$$

Substituindo em (3),

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{40}{x^2+40^2}\frac{dx}{dt}.$$

Logo, quando $v = \dfrac{dx}{dt} = 1,5\,\text{m/s}$ e $s = 100\,\text{m} \Rightarrow x = \sqrt{100^2-40^2} = 20\sqrt{21}\,\text{m}$, segue que

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{40}{(20\sqrt{21})^2+40^2}\cdot(1,5) = -6\cdot 10^{-3}\,\text{rad/s}$$

é a taxa que o ângulo decresce.

3.8 Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{y^4-3y^2+y}{y^3-y+2}$

Solução: Temos que

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^4-3y^2+y}{y^3-y+2} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^4\left(1-\dfrac{3}{y^2}+\dfrac{1}{y^3}\right)}{y^3\left(1-\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2}{y^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} y = +\infty.$$

Outra maneira de calcular este limite é utilizando as regras de L'Hôspital sucessivamente até eliminar as indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. De fato,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^4-3y^2+y}{y^3-y+2} &= \lim_{y\to+\infty}\frac{4y^3-6y+1}{3y^2-1}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{12y^2-6}{6y}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{24y}{6}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to5^+}\frac{e^t}{(t-5)^3}$

Solução: Note que quanto $t\to5^+$, isto é, t se aproxima por valores a direita de 5, o numerador tende ao número e^5. Por outro lado, a diferença no denominador $t-5$ tende a 0 por valores positivos. Logo,

$$\lim_{t\to5^+}\frac{e^t}{(t-5)^3}=+\infty.$$

(c) $\displaystyle\lim_{z\to0}(\cos z)^{1/z^2}$

Solução: Note que

$$(\cos z)^{1/z^2}=e^{\frac{1}{z^2}\ln(\cos z)}.$$

Assim, podemos escrever

$$\lim_{z\to0}(\cos z)^{1/z^2}=\lim_{z\to0}e^{(\ln(\cos z)/z^2)}$$

Seja $g(z)=\dfrac{\ln(\cos z)}{z^2}$ e $f(g(z))=e^{(g(z))}$, podemos usar a continuidade de f e escrever

$$\lim_{z\to0}(\cos z)^{1/z^2}=\lim_{z\to0}e^{(\ln(\cos z)/z^2)}=e^{\lim\limits_{z\to0}(\ln(\cos z)/z^2)} \tag{4}$$

Como

$$\lim_{z\to0}\frac{\ln(\cos z)}{z^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

aplicamos a regra de L'Hôspital e calculamos o limite

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\frac{\ln(\cos z)}{z^2} &= \lim_{z\to 0}\frac{-\text{sen}\, z}{2z\ \cos z}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\lim_{z\to 0}\frac{\text{sen}\, z}{z}\right)\left(\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos z}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo este resultado em (4), segue que

$$\lim_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

(d) $\displaystyle\lim_{w\to 0^+}\left(\frac{1}{w}\right)^{\text{tg}\, w}$

Solução: Note que

$$\left(\frac{1}{w}\right)^{\text{tg}\, w} = e^{\text{tg}\, w \ln\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

Assim, podemos escrever

$$\lim_{w\to 0^+}\left(\frac{1}{w}\right)^{\text{tg}\, w} = \lim_{w\to 0^+} e^{\text{tg}\, w \ln\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

Seja $g(z) = \text{tg}\, w \ln\left(\dfrac{1}{w}\right)$ e $f(g(z)) = e^{(g(z))}$, podemos usar a continuidade de f e escrever

$$\lim_{w\to 0^+}\left(\frac{1}{w}\right)^{\text{tg}\, w} = e^{\left(\lim_{w\to 0^+}\text{tg}\, w \ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)} \tag{5}$$

Agora, reescrevendo este último limite temos

$$\lim_{w\to 0^+}\text{tg}\, w \ln\left(\frac{1}{w}\right) = \lim_{w\to 0^+}\frac{\ln\left(\dfrac{1}{w}\right)}{\dfrac{1}{\text{tg}\, w}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

aplicando L'Hôspital

$$= \lim_{w\to 0^+}\frac{-\dfrac{w}{w^2}}{-\dfrac{\sec^2 w}{\text{tg}^2\, w}} = \lim_{w\to 0^+}\frac{\cos^2 w\text{tg}^2 w}{w} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

aplicando L'Hôspital novamente

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{w \to 0^+} \frac{(-2 \operatorname{sen} w)(\cos w)\,(\operatorname{tg}^2 w) - (\cos^2 w)\,(2\operatorname{tg}^2 w)(\sec w)}{1} \\
&= \frac{(-2 \operatorname{sen} 0)(\cos 0)\,(\operatorname{tg}^2 0) - (\cos^2 0)\,(2\operatorname{tg}^2 0)(\sec 0)}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Logo, substituindo este resultado em (5), segue que

$$\lim_{w \to 0^+} \left(\frac{1}{w}\right)^{\operatorname{tg} w} = e^0 = 1.$$

3.9 Sobre o Teorema do Valor Médio, faça o que se pede:

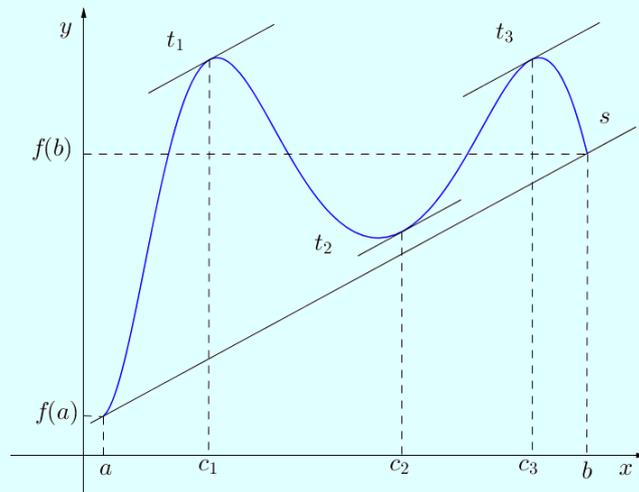
(a) Enuncie o Teorema do Valor Médio.

Solução: Seja f uma função definida e contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, derivável nos pontos internos. Então existe pelo menos um ponto c, compreendido entre a e b, tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

(b) Explique as interpretações geométrica e cinemática do Teorema do Valor Médio.

Solução: *Interpretação Geométrica:* Este teorema diz que se s é uma reta passando pelo pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, então existirá pelo menos um ponto $(c, f(c))$, com $a < c < b$, tal que a reta tangente ao gráfico de f, neste ponto, é paralela à reta s. Como $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é coeficiente angular de s e $f'(c)$ o da reta tangente t,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Interpretação Cinemática: Agora, suponhamos que uma partícula move-se em uma linha reta com uma função posição $s = f(t)$. Assim, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ será a velocidade média entre os instantes $t = a$ e $t = b$. O TVM nos diz que se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então tal velocidade média será igual à velocidade instantânea da partícula em algum instante $t = c$ entre a e b.

(c) Determine os valores $c \in (a, b)$ tais que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

em que $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $a = -3$ e $b = -1$.

Solução: Note que

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}$$

e que

$$f'(-3) = \frac{2}{(-3)^3} = -\frac{2}{27},$$
$$f'(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} \\
\frac{2}{c^3} &= \frac{-2 + \frac{2}{27}}{2} \\
\frac{2}{c^3} &= -1 + \frac{1}{27} \\
\frac{2}{c^3} &= \frac{-27 + 1}{27} \\
c^3 &= -2 \cdot \frac{27}{26} \\
c &= \sqrt[3]{-2 \cdot \frac{27}{26}} \\
c &= -\frac{3}{\sqrt[3]{13}}.
\end{aligned}$$

Logo, $-\dfrac{3}{\sqrt[3]{13}} \in (-3, -1)$.

3.10 Determine os extremos absolutos, caso existam, da função $f(t) = t + \text{cotg}\left(\frac{t}{2}\right)$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Solução: Os candidatos a pontos críticos de f são as raízes da equação

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{2}\text{cossec}^2\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

que pertençam ao intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Assim,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}\text{cossec}^2\left(\frac{t}{2}\right) &= 0 \\ \text{cossec}^2\left(\frac{t}{2}\right) &= 2 \\ \text{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{1}{2} \\ \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{t}{2} &= \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

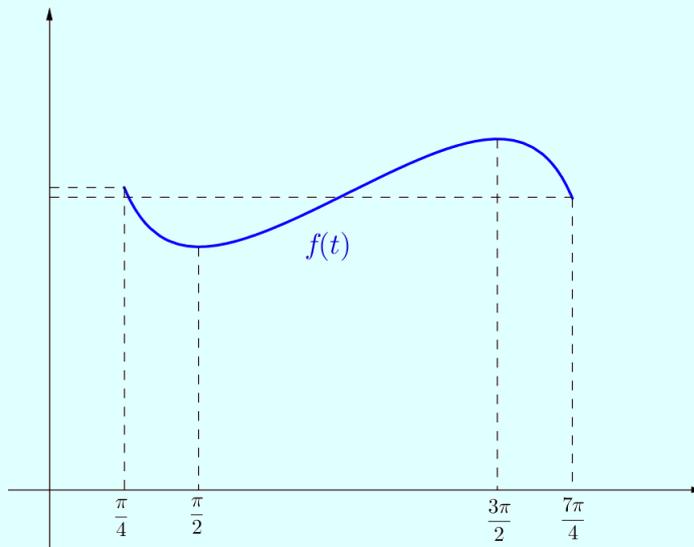
Finalmente, para achar os extremos absolutos de f, devemos calcular e comparar seus valores no ponto $t = \frac{\pi}{2}$, no ponto $t = \frac{3\pi}{2}$, e nas extremidades do intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \text{cotg}\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3,2.$$

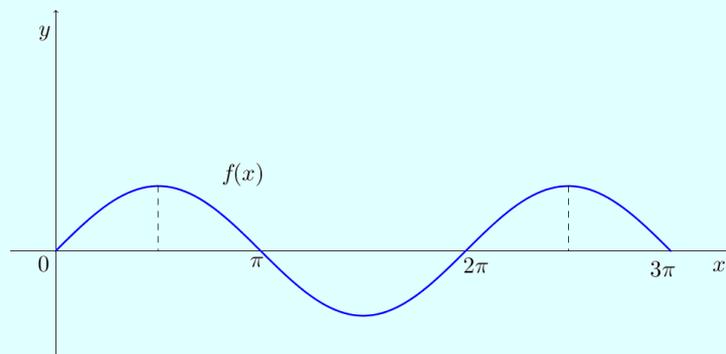
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \text{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 2,6.$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} + \text{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \approx 3,71.$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{4} + \text{cotg}\left(\frac{7\pi}{8}\right) \approx 3,1.$$

Da comparação desses valores, concluímos que a função dada assume seu máximo absoluto $3,71$ em $t = \frac{3\pi}{2}$ e o mínimo absoluto $2,6$ em $t = \frac{\pi}{2}$. Veja no gráfico abaixo:

3.11 Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, explique. Se for falsa, dê um contra-exemplo.

(a) O máximo de uma função que é contínua num intervalo fechado pode ocorrer em dois valores diferentes no intervalo;

Solução: Verdadeira! Seja f uma função contínua em $[a, b] \subset D_f$ e $x_0 \in [a, b]$. Dizemos que $f(x_0)$ é valor máximo de f em $[a, b]$ se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x em $[a, b]$, e, que $f(x_0)$ é valor mínimo de f em $[a, b]$ se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x em $[a, b]$. Em outras palavras, este teorema (chamado de Teorema do Valor Extremo) garante a existência dos valores extremos, mas não sua unicidade. Tome como exemplo a função $f(x) = \text{sen}\,(x)$ definida no intervalo $[0, 3\pi]$. Observe no gráfico que f possui mais de um valor máximo.

(b) Se $x = c$ é um número crítico da função f, então também é um número crítico da função $g(x) = f(x - k)$ com k uma constante;

Solução: **Falsa!** Se $x = c$ é um número crítico de f, então $f'(c) = 0$. Assim, tomando

$$g'(x) = f'(x - k)$$

temos que

$$g'(c) = f'(c - k) \neq 0 = f'(c).$$

Como contra-exemplo, podemos considerar as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = f(x - 2) = (x - 2)^2$. Observe que

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0,$$

isto é, $x = 0$ é número crítico de f. Mas

$$g'(x) = 2(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2,$$

isto é, $x = 2$ é número crítico de g.

(c) Se o gráfico de uma função polinomial intercepta o eixo x em três pontos, então ele deve ter pelo menos dois pontos nos quais a reta tangente é horizontal;

Solução: **Verdadeira!** Se f é uma função polinomial, então é contínua e derivável em todo seu domínio. Sejam $a, b, c \in D_f$, $0 < a < b < c$, tais que $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

Como f é contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em (a, b) e $f(a) = f(b) = 0$, segue do Teorema de Rolle que $f'(d) = 0$, isto é, existe pelo menos um $d \in (a, b)$ em que a tangente é horizontal.

Analogamente, considerando o intervalo $[b, c]$ e aplicando o Teorema de Rolle, temos que $f'(e) = 0$, isto é, existe pelo menos um $e \in (b, c)$ em que a tangente é horizontal.

(d) Se $0 < a < b$ então $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \dfrac{b-a}{2\sqrt{2}}$.

Solução: **Falsa!** Como $0 < a < b$, podemos escrever:

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} < \frac{1}{2\sqrt{2}} \tag{6}$$

Nestas condições, tomando um intervalo $[a, b]$ da função $f(x) = \sqrt{x}$, podemos aplicar o TVM. Assim,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} f'(c) &< \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{c}} &< \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ c &> 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Dessa forma, para encontrar um contra-exemplo, basta definir um intervalo $[a, b]$ tal que $c \in (a, b)$ não satisfaça (7).

Logo, tomando $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 1$, temos que

$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b - a} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{\dfrac{1}{2}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

o que contradiz a inequação (6).

3.12 Às 8 horas, um trem começa a se deslocar para percorrer um trajeto de 600 Km. O trem chega ao seu destino às 11h30min. Explique por que existem pelo menos dois instantes durante o trajeto em que a velocidade do trem é de 80 Km/h.

Solução: Seja a função posição $s(t)$ contínua no intervalo $[0; 3,5]$ e derivável no intervalo $(0; 3,5)$, temos que a velocidade média do trem é dada por:

$$\frac{s(3,5) - s(0)}{3,5 - 0} = \frac{600 - 0}{3,5 - 0} = 171,43\,\text{km/h}.$$

Pelo TVM , existe algun instante $t \in (0; 3,5)$ tal que $s'(t) = 171,43$.

Considerando o intervalo $[0, t]$, $0 < t < 3,5$, tal que

$$\frac{s(t) - s(0)}{t - 0} = 80 \Rightarrow s(t) = 80t.$$

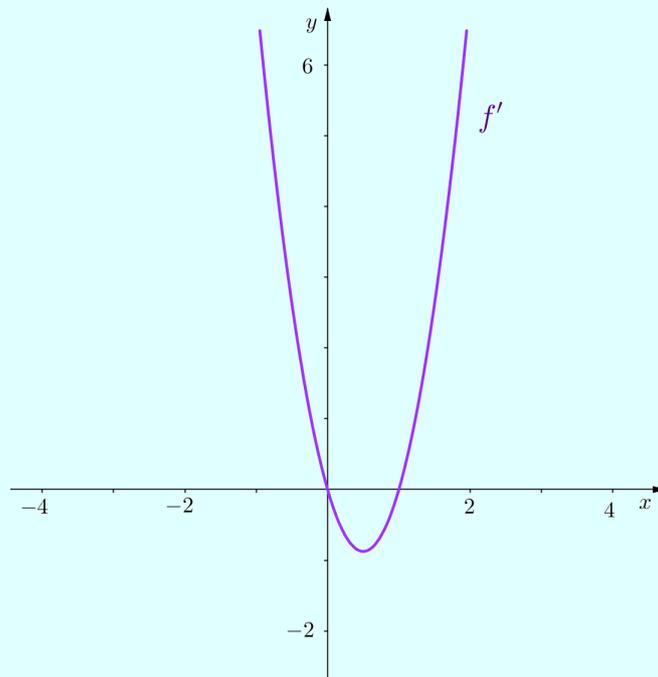
Então, pelo TVM existirá um instante $t = c$, tal que $s'(c) = 80$.

Analogamente, considerando o intervalo $[t; 3,5]$, tal que

$$\frac{s(3,5) - s(t)}{3,5 - t} = \frac{600 - s(t)}{3,5 - t} = 80 \Rightarrow s(t) = 80t + 320.$$

Logo, $s'(t) = 80$.

3.13 Para os itens (a) e (b), use o gráfico de f' para (i) identificar o(s) intervalo(s) para os quais f é crescente ou decrescente; (ii) estimar o(s) valor(es) de x tais que f atinge um máximo ou um mínimo.

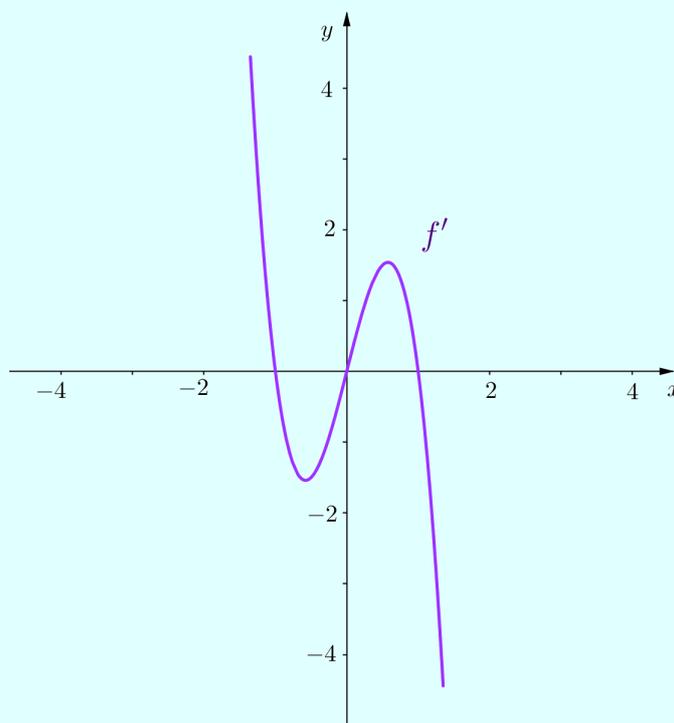
(a)

Solução:

(i) Podemos estudar o sinal de f' analisando cada intervalo do gráfico. Assim, obtemos a seguinte tabela:

$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$	$f' > 0$	f é crescente
$(0, 1)$	$f' < 0$	f é decrescente

(ii) Note que $f' > 0$ para $x < 0$ e que $f' < 0$ para $0 < x < 1$. Logo, f tem ponto de máximo em $x = 0$.

Observe também que $f' < 0$ para $0 < x < 1$ e que $f' > 0$ para $x > 1$. Logo, f tem ponto de mínimo em $x = 1$.

(b)

Solução:

(i) Estudando o sinal de f', analisando cada intervalo do gráfico, temos que:

$(-\infty, -1) \cup (0, 1)$	$f' > 0$	f é crescente
$(-1, 0) \cup (1, +\infty)$	$f' < 0$	f é decrescente

(ii) Note que para $x < -1$ tem-se $f' > 0$, e, para $-1 < x < 0$ tem-se $f' < 0$. Logo, f tem ponto de máximo local em $x = -1$.

Para $-1 < x < 0$ tem-se $f' < 0$, e, para $0 < x < 1$ tem-se $f' > 0$. Logo, f tem ponto de mínimo local em $x = 0$.

E para $0 < x < 1$ tem-se $f' > 0$, e, para $x > 1$ tem-se $f' < 0$. Logo, f tem ponto de máximo local em $x = 1$.

3.14

(a) Dê exemplo que uma função f que não tem ponto de inflexão em $(c, f(c))$, mas $f''(c) = 0$. Esboce o gráfico de f;

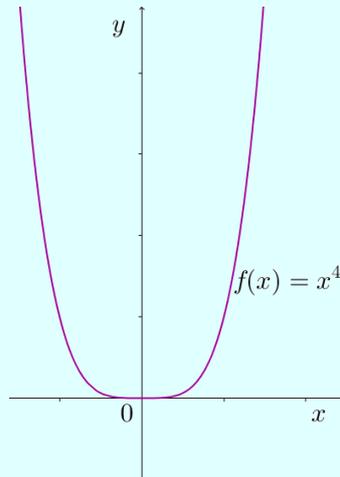
Solução: Considere a função $f(x) = x^4$. Temos que

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0,$$

isto é, $(0, f(0)) = (0, 0)$ é ponto crítico.

Note que $f' < 0$ para $x < 0$ e que $f' > 0$ para $x > 0$, isto é, f tem ponto de mínimo em $x = 0$.

Mas, tomando a segunda derivada $f''(x) = 12x^2$, observe que $f''(0) = 0$.

Veja o gráfico:

(b) Verifique que o polinômio cúbico $p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ tem exatamente um ponto de inflexão (x_0, y_0) com

$$x_0 = -\frac{b}{3\,a};$$

$$y_0 = \frac{2\,b^3}{27\,a^2} - \frac{b\,c}{3\,a} + d.$$

Solução: Calculando a primeira derivada obtemos:

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Calculando a segunda derivada obtemos:

$$p''(x) = 6ax + 2b.$$

Fazendo $p''(x_0) = 0$, temos que:

$$6ax_0 + 2b = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{3a}.$$

Note que $p''(x_0) < 0$ para $x_0 < -\frac{b}{3a}$, e, que $p''(x_0) > 0$ para $x_0 > -\frac{b}{3a}$, isto é, $p(x)$ é côncava para baixo no intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{3a}\right)$ e côncava para cima no intervalo $\left(-\frac{b}{3a}, +\infty\right)$.

Logo, $x_0 = -\frac{b}{3a}$ é ponto de inflexão.

Além disso,

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{b}{3a}\right) &= a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d \\ &= -\frac{ab^2}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d \\ &= \frac{-ab^3 + 3ab^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a} + d \\ &= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d \\ &= y_0 \end{aligned}$$

como queríamos.

3.15 Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x}$ e determine seus estremos locais, caso existam. Lembre de justificar a classificação dos extremos utilizando os resultados aprendidos.

Solução: Temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\, x \neq -2\}$. Assim, calculando a primeira derivada, temos que:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 2x) - x \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x^2}{(x^2 + 2x)^2}.$$

Note que os termos x^2 e $(x^2 + 2x)^2$ são sempres positivos. Assim, para todo $x \in D_f$, o sinal de menos define que $f'(x) < 0$, isto é, f é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

3.16 Estude a concavidade da função da questão anterior, determinando os pontos de inflexão, caso existam.

Solução: Calculando a segunda derivada, temos que:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2+2x)^2 - (-x^2) \cdot [2 \cdot (x^2+2x) \cdot (2x+2)]}{(x^2+2x)^4} \\ &= \frac{2x^5+4x^4}{(x^2+2x)^4} \\ &= \frac{2x^4(x+2)}{(x^2+2x)^4}. \end{aligned}$$

Note que os termos $2x^4$ e $(x^2+2x)^4$ são sempre positivos. Assim, para estudarmos o sinal de f'', basta estudarmos o sinal do termo $x+2$. Desta forma, observe que $f'' < 0$ para $x+2 < 0 \Rightarrow x < -2$ e que, analogamente, $f'' > 0$ para $x > -2$.

Logo, f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -2)$ e côncava para cima no intervalo $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.

3.17 Considere uma folha de papelão retangular medindo um metro de comprimento por oitenta centímetros de largura. Retirando dos quatro cantos um quadrado de lado x, determine o valor de x de modo que tenhamos uma caixa, obtida quando dobramos os lados já com os quadrados retirados, de máximo volume.

Solução: Seja x a altura, $100-2x$ o comprimento da base e $80-2x$ a largura da base da caixa. O volume é dado por:

$$V(x) = (100-2x)(80-2x)x \Leftrightarrow V(x) = 8000x - 360x^2 + 4x^3.$$

Calculando a primeira derivada obtemos:

$$V'(x) = 8000 - 720x + 12x^2.$$

Fazendo $V'(x) = 0$, temos que

$$8000 - 720x + 12x^2 = 0$$

cujas raízes $x_1 = \dfrac{90+10\sqrt{21}}{3} \approx 45,27$ e $x_2 = \dfrac{90-10\sqrt{21}}{3} \approx 14,72$ são os pontos críticos da função.

Note que $f' > 0$ para $x < \dfrac{90-10\sqrt{21}}{3}$ e $f' < 0$ para $x > \dfrac{90-10\sqrt{21}}{3}$, isto é, f é crescente no intervalo $\left(-\infty, \dfrac{90-10\sqrt{21}}{3}\right)$ e decrescente no intervalo $\left(\dfrac{90-10\sqrt{21}}{3}, +\infty\right)$.

Logo, $x = \dfrac{90 - 10\sqrt{21}}{3}$ cm fornece o volume máximo $V\left(\dfrac{90 - 10\sqrt{21}}{3}\right) = 52513,8 \text{ cm}^3$.

3.18 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, explique. Se for falso, explique ou dê um contra-exemplo.

(a) Os pontos de inflexão de uma função contínua sempre são as raízes da segunda derivada;

Solução: Falso! Tome a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$, então $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$ e $f''(x) = -\dfrac{2}{9x^{5/3}}$. Note que $f'' < 0$ para $x < 0$ e $f'' > 0$ para $x > 0$, isto é, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, +\infty)$. Logo, $x = 0$ é ponto de inflexão mas f'' não está definida neste ponto.

(b) Nem todo ponto crítico é extremo local.

Solução: Verdadeiro! A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é tal que $f'(0) = 0$, porém $(0, f(0)) = (0, 0)$ não é ponto de máximo nem de mínimo.

(c) O Teste da Segunda Derivada nos mostra como determinar os pontos de inflexão de uma função;

Solução: Falso! O Teste da Segunda Derivada nos mostra como determinar os pontos de máximo e mínimo.

(d) O Teste da Segunda Derivada é inconclusivo em um ponto p no domínio de uma função f se $f''(p) = 0$.

Solução: Verdadeiro! O ponto $(p, f(p))$ pode ser um ponto de máximo, um ponto de mínimo ou nenhum. Por exemplo, seja $f(x) = 5x^4 - 4x^3$, então

$$f'(x) = 20x^3 - 12x^2$$
$$f''(x) = 60x^2 - 24x$$

Par encontrarmos os números críticos, fazemos $f'(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 - 12x^2 = 4x^2(5x - 3) = 0$ e obtemos $x = 0$ e $x = \dfrac{3}{5}$. Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos f'' nesses pontos críticos:

$$f''(0) = 0 \quad \text{e} \quad f''\left(\frac{3}{5}\right) = 36 > 0.$$

Uma vez que $f'\left(\dfrac{3}{5}\right) = 0$ e $f''\left(\dfrac{3}{5}\right) > 0$, temos que $\left(\dfrac{3}{5}, f\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)$ é ponto de mínimo local. Por outro lado, uma vez que $f''(0) = 0$, o Teste da Segunda Derivada não fornece informações sobre o número crítico 0.

3.19 Considere a função: $g(x) = x^3 + x^2$.

(a) Determine o domínio de g;

Solução: Como g é uma função polinomial, seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

(b) Verifique se g é par ou ímpar;

Solução: Temos que:

$$g(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 = -(x^3 - x^2) \neq -g(x)$$

Logo, g não é par nem ímpar.

(c) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de g, bem como os seus extremos relativos, caso existam. Justifique a classificação dos mesmos utilizando o Teste da Primeira Derivada ou o Teste da Segunda Derivada.

Solução: Calculando a primeira derivada, temos

$$g'(x) = 3x^2 + 2x = x\,(3x + 2).$$

Fazendo $g'(x) = 0$, obtemos os números críticos $x = 0$ e $x = -\dfrac{2}{3}$.

Note que $g' > 0$ para $x < -\dfrac{2}{3}$ ou para $x > 0$. Note também que $g' < 0$ para $-\dfrac{2}{3} < x < 0$. Assim,

$\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty)$	$g' > 0$	g é crescente
$\left(-\dfrac{2}{3}, 0\right)$	$g' < 0$	g é decrescente

Calculando a segunda derivada obtemos

$$g''(x) = 6x + 2$$

Para usar o Teste da Segunda Derivada, calculamos g'' nos pontos críticos. Assim,

$$g''(0) = 2 > 0, \quad g''\left(-\frac{2}{3}\right) = -2 < 0$$

Logo, uma vez que $g'(0) = 0$ e $g''(0) > 0$, temos que $g(0) = 0$ é um mínimo local. E uma vez que $g'\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$ e $g''\left(-\frac{2}{3}\right) < 0$, temos que $g\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ é um máximo local.

(d) Estude a concavidade de g e seus pontos de inflexão, caso existam.

Solução: Temos que

$$g''(x) = 6x + 2.$$

Note que $g'' < 0$ para $x < -\frac{1}{3}$ e que $g'' > 0$ para $x > -\frac{1}{3}$. Assim,

$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$g'' < 0$	g é côncava para baixo
$\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$	$g'' > 0$	g é côncava para cima

Logo, o ponto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right)$ é ponto de inflexão.

(e) Calcule os limites

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} g(x)$$

e as assíntotas de g, caso existam.

Solução: Observe que, como $D_g = \mathbb{R}$, g não possui assíntotas verticais. Além disso, como

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 + x^2 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 + x^2 = -\infty,$$

g não possui horizontais. E por fim, como

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 + x = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 + x = -\infty,$$

temos que g não possui assíntotas oblíquas.

(f) Determine as raízes e o ponto de intersecção de g com o eixo y.

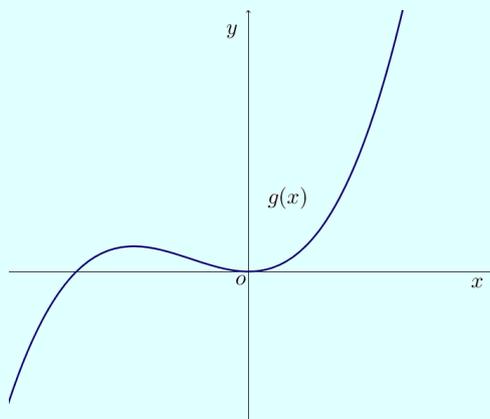
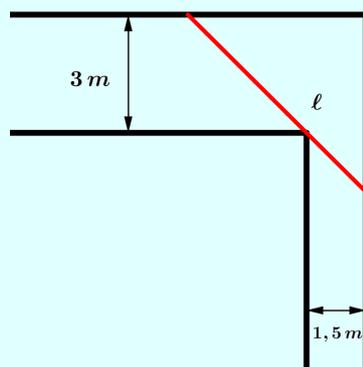
Solução: Temos que

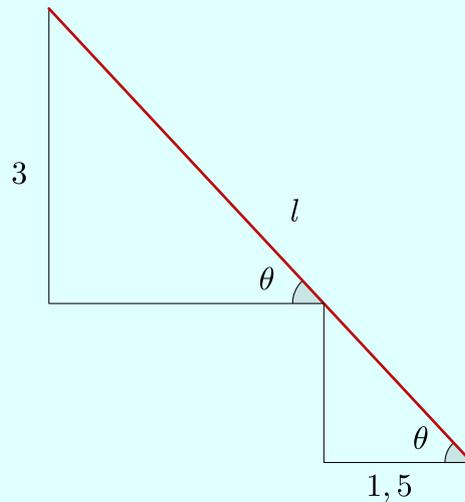
$$g(x) = x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0$$

possui $x = 0$ (raíz dupla) e $x = -1$ como raízes.

E o ponto de intersecção com o eixo y é dado por $(0, g(0)) = (0, 0)$.

(g) Utilize as informações dos itens anteriores para esboçar o gráfico da função g.

Solução: Esboçamos o gráfico abaixo:

3.20 Dois corredores de largura $3\,m$ e $1,5\,m$, encontram-se em ângulo reto como indica a figura abaixo:

Seja ℓ o comprimento máximo de uma viga que pode passar horizontalmente de um corredor para o outro. Determine o valor de ℓ.

Solução: Seja $l = l(\theta)$ o comprimento da viga conforme indica a figura abaixo.

Então o comprimento procurado é o mínimo da função

$$l(\theta) = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{1,5}{\cos(\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Assim, derivando e igualando a zero, temos

$$l'(\theta) = \frac{1,5\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} - \frac{3\,\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1,5\operatorname{sen}^3\theta - 3\,\cos^3\theta}{(\cos\theta\operatorname{sen}\theta)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = \left(\frac{3}{1,5}\right)^{1/3} \Leftrightarrow \theta = 0,9.$$

Note que se $\theta < 0,9$, temos $l'(\theta) < 0$ e se $\theta > 0,9$, $l'(\theta) > 0$, donde se conclui que, pelo teste da primeira derivada, $\theta = 0,9$ é ponto de mínimo.

Logo,

$$l(0,9) = \frac{3}{\operatorname{sen}(0,9)} + \frac{1,5}{\cos(0,9)} = 6,2\,\text{m}$$

é o comprimento da viga.

3.21 Esboce o gráfico da função $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x\,\ln x^2$, indicando seus respectivos domínio, simetria, intersecções com eixos coordenados, intervalos de crescimento/decrescimento, concavidade, extremos locais, pontos de inflexão e assíntotas, quando existirem.

Solução:

(i) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

Observe que o domínio de f é o conjunto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.$$

Assim, o gráfico de f não possui intersecção com o eixo y. Por outro lado,

$$y = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

isto é, os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são os pontos de intersecção com o eixo x.

Além disso, temos que f é ímpar. De fato,

$$f(-x) = (-x) - \frac{1}{(-x)} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-} x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$$

temos que $x = 0$ é assíntota vertical.

Como

$$\lim_{x\to -\infty} x - \frac{1}{x} = \underbrace{\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1}}_{\text{L'Hôspital}} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} x - \frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$$

temos que f não possui assíntota horizontal.

E como

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{2x}}_{\text{L'Hôspital}} = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1$$

$\left(\text{analogamente} \quad \text{m} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1\right)$ então

$$n = \lim_{x\to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to +\infty} \left[x - \frac{1}{x} - x\right] = \lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{x} = 0,$$

e, portanto, $y = x$ é assíntota oblíqua.

Agora, observe que

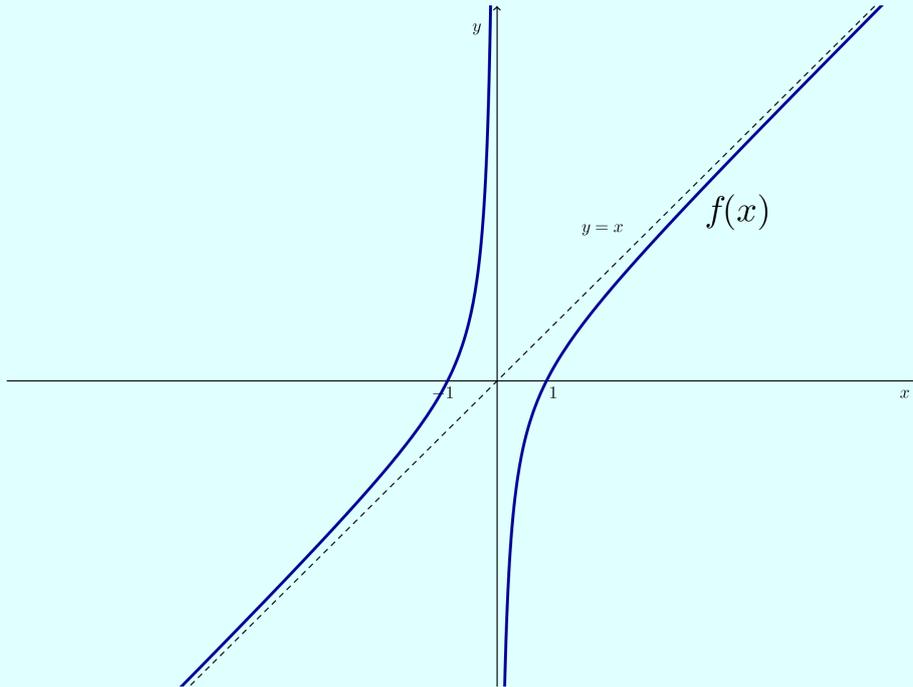
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

para todo x em D_f, isto é, f é sempre crescente e não apresenta valores de máximo e mínimo.

Além disso, observe que

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} > 0$$

para $x < 0$, e, $f'' < 0$ para $x > 0$, isto é, f é côncava para cima no intervalo $(-\infty, 0)$ e para baixo no intervalo $(0, +\infty)$. E f não possui ponto de inflexão.

Com isso, finalmente esboçamos o gráfico abaixo:

(ii) $g(x) = x \ln x^2$.

Observe que o domínio de g é o conjunto

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}.$$

Assim, o gráfico de g não possui intersecção com o eixo y. Por outro lado,

$$y = 0 \Rightarrow x \ln x^2 = 0 \overset{(x \neq 0)}{\Rightarrow} \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow e^{\ln x^2} = e^0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

isto é, os pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ são os pontos de intersecção com o eixo x.

Além disso, temos que g é ímpar. De fato,

$$f(-x) = (-x) \ln[(-x)^2] = -x \ln(x^2) = -f(x).$$

Por inspeção no domínio de g, calculamos

$$\lim_{x\to 0^-} x\,\ln x^2 = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}_{\text{L'Hôspital}} = \lim_{x\to 0^-} 2x = 0$$

e, analogamente, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\ln x^2 = 0$, então temos que g não possui assíntota vertical.

Como

$$\lim_{x\to -\infty} x\,\ln x^2 = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} x\,\ln x^2 = +\infty$$

temos que g não possui assíntota horizontal.

E como

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} = \frac{x\,\ln x^2}{x} = \lim_{x\to -\infty} \ln x^2 = +\infty$$

e, analogamente

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \ln x^2 = +\infty,$$

temos que g não possui assíntota oblíqua.

Calculando a primeira derivada, temos

$$g'(x) = \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \Leftrightarrow g'(x) = \ln x^2 + 2.$$

Agora, para estudarmos o sinal de g' façamos

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ \ln x^2 + 2 &= 0 \\ \ln x^2 &= -2 \\ e^{\ln x^2} &= e^{-2} \\ x^2 - e^{-2} &= 0 \\ (x + e^{-1})(x - e^{-1}) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, elaboramos a seguinte tabela:

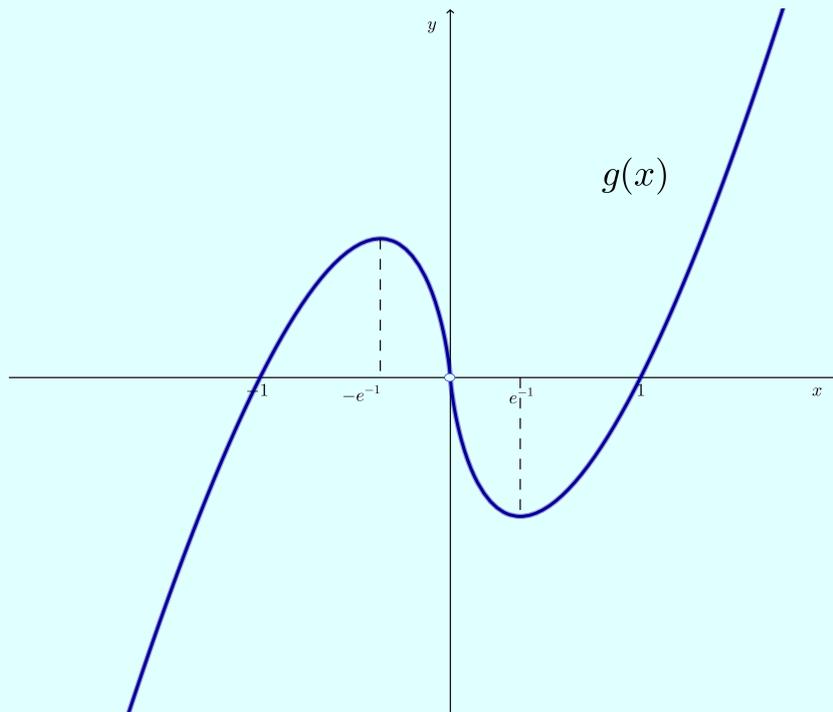
	$(-\infty, -e^{-1})$	$(-e^{-1}, 0) \cup (0, e^{-1})$	$(e^{-1}, +\infty)$
$x + e^{-1}$	$-$	$+$	$+$
$x - e^{-1}$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$
f	crescente	decrescente	crescente

Note que pelo Teste da Primeira Derivada, os pontos críticos $x = -e^{-1}$ e $x = e^{-1}$ são, respectivamente, máximos e mínimos locais.

Calculando a segunda derivada, temos que

$$g''(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x \Leftrightarrow g''(x) = \frac{2}{x}.$$

É facil ver que $g''(x) < 0$ para $x < 0$ e $g''(x) > 0$ para $x > 0$. Logo, g é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e para baixo em $(0, +\infty)$. E não apresenta ponto de inflexão.

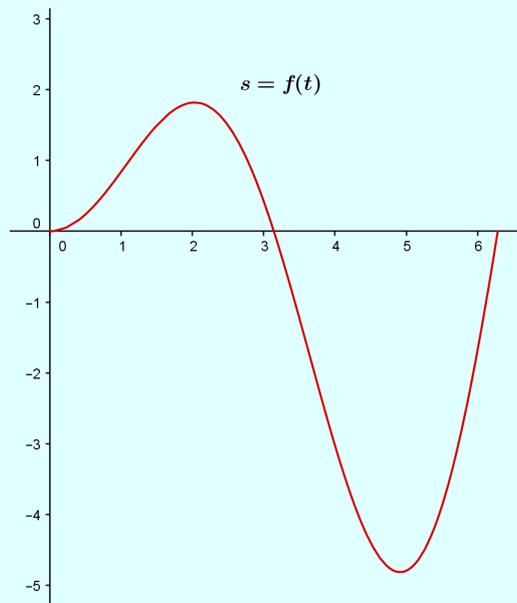
Finalmente, esboçamos o seguinte gráfico:

3.22 Cada um dos itens abaixo possui o gráfico de uma função posição $s = f(t)$ de um corpo que se desloca ao longo de um eixo coordenado. Para cada um deles, determine:

(I) O instante t aproximadamente, se houver, em que o corpo apresenta velocidade e/ou aceleração igual a zero.

(II) Os intervalos aproximados em que o corpo se move para frente ou para trás.

(III) Os intervalos aproximados em que a aceleração foi positiva ou foi negativa.

Solução: Seja a velocidade $v(t) = f'(t)$ e a aceleração $a(t) = f''(t)$.

(a)

(I) Observe que nas proximidades de $t = 2$ e $t = 5$ temos, respectivamente, pontos de máximo e mínimo. Assim, podemos estimar que

$$v(2) = f'(2) \approx 0 \quad \text{e} \quad v(5) = f'(5) \approx 0$$

isto é, a velocidade é aproximadamente nula nestes instantes.

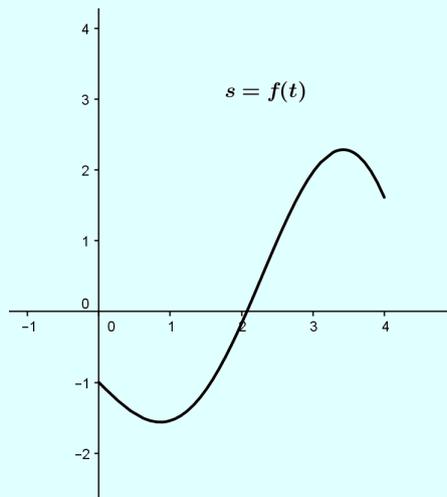
Agora, observe que nas proximidades de $t = 1$ e $t = 4$, ocorre mudanças de concavidade. Assim, podemos estimar que

$$a(1) = f''(1) \approx 0 \quad \text{e} \quad a(4) = f''(4) \approx 0$$

isto é, a aceleração é nula nestes instantes.

(II) Podemos estimar que no intervalo $(0, 2) \cup (5, 6)$ a função $s = f(t)$ é crescente, e, portanto o corpo se move para frente neste intervalo. Por outro lado, no intervalo $(2, 5)$, $s = f(t)$ é decrescente, isto é, o corpo se move para trás.

(III) Agora, observe que podemos estimar que $s = f(t)$ é côncava para cima em $(0, 1) \cup (4, 6)$, isto é, $a(t) = f''(t) > 0$ neste intervalo (aceleração positiva). Por outro lado, $s = f(t)$ é côncava para baixo em $(1, 4)$, isto é, $a(t) = f''(t) < 0$ neste intervalo (aceleração negativa).

(b)

(I) Observe que nas proximidades de $t = 1$ e $t = 3,5$ temos, respectivamente, pontos de mínimo e máximo. Assim, podemos estimar que

$$v(1) = f'(1) \approx 0 \quad \text{e} \quad v(3,5) = f'(3,5) \approx 0$$

isto é, a velocidade é aproximadamente nula nestes instantes.

Agora, observe que nas proximidades de $t = 2$ ocorre uma mudança de concavidade. Assim, podemos estimar que

$$a(2) = f''(2) \approx 0$$

isto é, a aceleração é nula neste instante.

(II) Podemos estimar que no intervalo $(1; 3,5)$ a função $s = f(t)$ é crescente, e, portanto o corpo se move para frente neste intervalo. Por outro lado, no intervalo $(0,1) \cup (3,5; 4)$, $s = f(t)$ é decrescente, isto é, o corpo se move para trás.

(III) Agora, observe que podemos estimar que $s = f(t)$ é côncava para cima em $(0, 2)$, isto é, $a(t) = f''(t) > 0$ neste intervalo (aceleração positiva). Por outro lado, $s = f(t)$ é côncava para baixo em $(2, 4)$, isto é, $a(t) = f''(t) < 0$ neste intervalo (aceleração negativa).

3.23

(a) Defina primitiva de uma função contínua f.
Solução: Uma função $F(x)$ é chamada uma **primitiva** da função $f(x)$ no intervalo I se para todo $x \in I$, tem-se:

$$F'(x) = f(x).$$

(b) Em cada item abaixo, serão dadas duas funções $F(x)$ e $f(x)$. Utilize as técnicas de derivação para verificar se a função F é uma primitiva da função f.

Solução: Vamos usar a definição do ítem anterior.

(I) $F(x) = x^7 + 8$ e $f(x) = x^6$;

Temos que

$$F'(x) = 7x^6 \neq x^6 = f(x).$$

Logo, F não é primitiva de f.

(II) $F(x) = x^4 - 3x^3 + x + 2$ e $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$;

Temos que

$$F'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 1 \neq 4x^3 - 3x^2 + 1 = f(x).$$

Logo, F não é primitiva de f.

(III) $F(x) = \dfrac{(4x-7)^3}{12} + 5$ e $f(x) = (4x-7)^2$;

Temos que

$$F'(x) = \frac{3 \cdot (4x-7)^2 \cdot 4}{12} = (4x-7)^2 = f(x).$$

Logo, F é primitiva de f.

(IV) $F(x) = 2 - \dfrac{\cos(3x-5)}{3}$ e $f(x) = \operatorname{sen}(3x-5)$.

Temos que

$$F'(x) = \frac{\operatorname{sen}(3x-5) \cdot 3}{3} = \operatorname{sen}(3x-5) = f(x).$$

Logo, F é primitiva de f.

Integrais

Plano

Tópicos abordados nos exercícios

- Mudança de variável na integral;
- Teorema Fundamental do Cálculo;
- Integração por partes;

Conteúdos essenciais para a resolução dos exercícios

- Funções e suas propriedades;
- Regras de Derivação;
- Primitivação;

Métodos e Técnicas

Mudança de variável

- Nas questões citadas efetua-se a mudança de variável para resolver a integral dada:

Exercícios 4.6(b); 4.6(c); 4.6(d); 4.7(b)

4.8; 4.12(b); 4.18(a); 4.18(c)

Integração por Partes

- Nas questões citadas efetua-se a integração por partes para resolver a integral dada:

Exercícios 4.9; 4.12(a); 4.13(a); 4.18

Teorema Fundamental do Cálculo

- Nas questões citadas utiliza-se o Teorema Fundamental do Cálculo e suas propriedades para o cálculo de integrais definidas:

Exercícios 4.6(a); 4.7(a); 4.10; 4.11

4.15; 4.16; 4.17; 4.19; 4.20

●●●○

4.1

(a) Se deixarmos cair uma pedra, podemos admitir que a resistência do ar ("arraste") é desprezível. Experimentos mostram que, segundo essa suposição, a aceleração desse movimento, $\frac{d^2y}{dt^2}$, é constante (e igual à chamada aceleração da gravidade $g = 9,8\,m/s^2$). Verifique que $y = \frac{gt^2}{2}$.

(b) Se no problema anterior, o movimento da pedra começa no instante $t = 0$, a partir da posição inicial y_0 e com velocidade inicial v_0, mostre que $y = y_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$.

(c) Se um avião corre numa pista de 3 km, começando com uma velocidade de 6 m/s, movendo-se com uma aceleração constante e levando um tempo de 1 min para levantar voo, com qual velocidade ele deixa o solo?

●●●○

4.2 Mostre que:

(a) $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

(b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$

●●●●

4.3 Determine uma fórmula para a Soma de Riemann da função $f(x) = x^2 + 1$ ao longo do intervalo $[0, 3]$, obtida dividindo-se o intervalo em n subintervalos iguais e os pontos tomados em cada subintervalo são os extremos à esquerda. Em seguida, considere o limite dessas somas quando $n \to +\infty$ para calcular a área sob a curva ao longo do referido intervalo.

●●●○

4.4 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_2^4 x^{\pi-1}\,dx$

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cossec}\theta\,\operatorname{cotg}\theta\,d\theta$

(c) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right)\,dx$

●●○○

4.5 Determine a derivada $\frac{dy}{dx}$ das funções:

(a) $y = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

(b) $y = \int_{\sqrt{x}}^0 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

●●●○

4.6 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_{-1}^2 |x - x^2|\,dx$

(b) $\int \operatorname{cossec}^2 2\theta\,\operatorname{cotg} 2\theta\,d\theta$

(c) $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + 3\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

(d) $\int \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(x-1)}\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\,dx$

●●●●

4.7

(a) Seja f uma função periódica de período p, ou seja $f(x+p) = f(x)$. Mostre que

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_p^{a+p} f(x)\,dx$$

Interprete esse resultado geometricamente.

(b) Se além disso, f for ímpar, mostre que

$$\int_0^p f(x)\,dx = 0$$

●●●●

4.8 Calcule as seguintes integrais utilizando a mudança de variável adequada.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}^{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}\,dt$

●●●○

4.9 Nas integrais a seguir, podemos calcular seus respectivos valores utilizando uma integração por partes. Em cada uma delas, determine os candidatos a u e dv para que a utilização da referida técnica esteja correta. Após isso, escreva a fórmula da integração por partes com a sua escolha feita anteriormente.

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \arccos\theta d\theta$

(c) $\displaystyle\int x\text{cossec}^2\,x\,dx$

●●○○

4.10 Determine o valor médio das seguintes funções ao longo do intervalo dado:

(a) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ em $[0, 2]$

(b) $g(t) = t^2 - t$ em $[-1, 2]$

●●○○

4.11 Com t meses de experiência um funcionário do correio é capaz de separar $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$ cartas por hora. Qual a velocidade média com que o funcionário consegue separar a correspondência durante os 5 primeiros meses de trabalho?
Dica: Use o TVM para integrais.

●●●○

4.12 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \ln^3 x\, dx$

(b) $\displaystyle\int x(2+3x)^{\frac{1}{3}}$

(c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

●●●○

4.13 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, explique. Se for falso, explique ou dê um contraexemplo.

(a) A fórmula da integração por partes é obtida pela regra do produto para derivadas.

(b) Toda função integrável é contínua.

(c) O Teorema do Valor Médio para integrais garante que existe um único ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

●●○○

4.14 Esboce o gráfico dos integrandos e use áreas para calcular as integrais.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2-|x|)\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (1+\sqrt{4-x^2})\, dx$

●●○○

4.15

(a) Qual o valor da integral $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx$?

(b) Sabendo do resultado do item (a), é verdade que podemos entender a integral acima como sendo a área compreendida entre o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 2\pi$? Explique.

(c) Elabore uma maneira para calcular a área da região descrita no item (b).

●●●○

4.16 Se em 1970, foram utilizados $20,3$ bilhões de barris de petróleo no mundo todo e se a demanda mundial de petróleo cresce exponencialmente a uma taxa de 9% ao ano, então a demanda $A(t)$ anual de petróleo no tempo t é $A(t) = 20,3\, e^{0,09t}$ $(t = 0$ em 1970$)$. Se a demanda continua crescendo a uma taxa de 9% ao ano, qual será a quantidade de petróleo consumida entre os anos de 1970 e 2016?

●●●●

4.17 Calcule as áreas das figuras determinadas pelas curvas dadas:

(a) $y = -\dfrac{2x}{3}$, $y = x - 5$ e $x = 0$.

(b) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

(c) $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$ e $x = \dfrac{\pi}{4}$.

(d) A área comum a $x^2 + y^2 \leq 4x$ e $x^2 + y^2 \leq 4$.

●●●●

4.18 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} \, dx$.

(b) $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx) \, dx$; $a, b \neq 0$.

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5 - 4x - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

●●●○

4.19

(a) Calcule o comprimento de arco da curva $y = \sqrt[3]{x^2}$ entre os pontos $(8, 4)$ e $(27, 9)$.

(b) Qual é o trabalho realizado ao se esticar uma mola em 8 cm sabendo que a força de 1 N a estica em 1 cm? (*Dica:* Use a lei de Hooke.)

●●●○

4.20 Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pela curva $y = \text{sen}\,(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ e o eixo dos x.

Sugestões

4.1 Lembre-se que o deslocamento é a primitiva da velocidade, e por sua vez, a velocidade é a primitiva da aceleração.

4.2 Observe que:

$$(\operatorname{arcsen} x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.3 Considere:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x$$

onde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $\lambda_i = (i-1)\Delta x$.

4.4 Note que:

$$(\operatorname{cossec} \theta)' = -\operatorname{cossec} \theta \operatorname{cotg} \theta.$$

4.5 Use o Teorema Fundamental do Cálculo.

4.6 Faça

$$u = \operatorname{cossec}(2\theta) \quad \text{e} \quad -\frac{du}{2} = \operatorname{cossec}^2(2\theta)\, d\theta.$$

4.7 Seja F uma primitiva de f, observe que:

$$F'(x+p) = f(x+p) = f(x) = F'(x).$$

4.8 Faça $u = e^t \Rightarrow du = e^t\, dt$ e depois $u = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow du = \sec^2 \theta\, d\theta$.

4.9 **4.10** Use o TVM para integrais.

4.12 Use:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

4.13 Integre ambos os membros da equação:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

4.14 Use um *software* matemático para esboçar o gráfico dos integrandos.

4.15 Subdivida a região em duas áreas iguais.

4.16 A quantidade de petróleo é dada pela área sob a curva de demanda para um certo período.

4.17 Note que $(x-2)^2+y^2 = 4$ é um círculo de raio 2 com centro em $(2,0)$, e, que $x^2+y^2 = 4$ é um círculo centrado na origem com raio 2.

4.18 Faça $u = e^{ax} \Rightarrow du = ae^{ax}dx$, $dv = \operatorname{sen}(bx)\, dx \Rightarrow v = -\dfrac{\cos(bx)}{b}$ e integre por partes.

4.19 Use a lei de Hooke.

4.20 Use a simetria do sólido.

Respostas

4.1

(a) Se deixarmos cair uma pedra, podemos admitir que a resistência do ar ("arraste") é desprezível. Experimentos mostram que, segundo essa suposição, a aceleração desse movimento, $\frac{d^2y}{dt^2}$, é constante (e igual à chamada aceleração da gravidade $g = 9,8\,m/s^2$). Verifique que $y = \frac{gt^2}{2}$.

Solução: Temos que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

Assim, como a velocidade é a primitiva da aceleração, temos

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = gt + C_1 \tag{8}$$

e, como o deslocamento é a primitiva da velocidade, segue que

$$y = \frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2 \tag{9}$$

Note que, no movimento de queda livre, quando $t = 0$, teremos

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

e

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Logo,

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

■

(b) Se no problema anterior, o movimento da pedra começa no instante $t = 0$, a partir da posição inicial y_0 e com velocidade inicial v_0, mostre que $y = y_0 + v_0t + \frac{gt^2}{2}$

Solução: Imediatamente da equação (8) temos

$$v(0) = C_1 = v_0$$

e da equação (9)

$$y(0) = C_2 = y_0.$$

Logo,

$$y = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

■

(c) Se um avião corre numa pista de 3 km, começando com uma velocidade de 6 m/s, movendo-se com uma aceleração constante e levando um tempo de 1 min para levantar voo, com qual velocidade ele deixa o solo?

Solução: Tomando

$$y = \frac{at^2}{2} + v_0 t + y_0$$

fazemos $y = 3000$ m, $v_0 = 6$ m/s e $t = 60$ s. Assim, obtemos

$$3000 = a \cdot \frac{60^2}{2} + 6 \cdot 60 \Rightarrow a = 1,467\,\mathrm{m/s}^2.$$

Então,

$$v = at + v_0 \Rightarrow v(t) = 1,467t + 6$$

e, portanto, em $t = 60$

$$v(60) = 1,467 \cdot 60 + 6 = 94\,\mathrm{m/s}$$

é a velocidade com a qual o avião deixa o solo.

4.2 Mostre que:

(a) $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

Solução: Basta notar que as funções $\operatorname{arcsen} x$ e $-\arccos x$ são primitivas da mesma função, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Logo, elas diferem por uma constante C:

$$\operatorname{arcsen} x + \arccos x = C.$$

Fazendo $x = 0$ nesta expressão, resulta que $C = \dfrac{\pi}{2}$.

(b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \dfrac{\pi}{2}$

Solução: Analogamente ao ítem anterior, note que as funções $\operatorname{arctg} x$ e $-\operatorname{arccotg} x$ são primitivas de $\dfrac{1}{1+x^2}$. Logo,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = C$$

.

Fazendo $x = 1$, resulta que $C = \dfrac{\pi}{2}$.

4.3 Determine uma fórmula para a Soma de Riemann da função $f(x) = x^2 + 1$ ao longo do intervalo $[0, 3]$, obtida dividindo-se o intervalo em n subintervalos iguais e os pontos tomados em cada subintervalo são os extremos à esquerda. Em seguida, considere o limite dessas somas quando $n \to +\infty$ para calcular a área sob a curva ao longo do referido intervalo.

Solução: Dividimos o intervalo $[0, 3]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a Δx e tomamos os pontos λ_i à esquerda de cada partição. Assim, tomamos

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\Delta x$$

em que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{e} \quad \lambda_i = (i-1)\Delta x = \frac{3(i-1)}{n}.$$

Então, sendo $f(x) = x^2 + 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3(i-1)}{n}\right)^2 + 1\right] \cdot \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{9(i-1)^2}{n^2} + 1\right) \cdot \frac{3}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{27(i-1)^2}{n^3} + \frac{3}{n}\right) = \frac{27}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{n} \\
&= \frac{27}{n^3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right) + \frac{3}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1
\end{aligned}$$

Substituindo $\sum_{i=0}^{n} 1 = n$, $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, segue que a igualdade acima fica

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} &= \frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} + n\right) + \frac{3}{n} \cdot n \\
&= 9 + \frac{27}{2n} + \frac{27}{6n^2} - \frac{27}{n} + 3
\end{aligned}$$

Logo, o limite dessas somas, quando $n \to +\infty$, é dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} &= \lim_{n \to +\infty} \left(9 + \frac{27}{2n} + \frac{27}{6n^2} - \frac{27}{n} + 3\right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} 9 + \lim_{n \to +\infty} \frac{27}{2n} + \lim_{n \to +\infty} \frac{27}{6n^2} - \lim_{n \to +\infty} \frac{27}{n} + \lim_{n \to +\infty} 3 \\
&= 9 + 3 \\
&= 12
\end{aligned}$$

isto é, a área sob a curva f no intervalo $[0, 3]$ é 12 u.a.

4.4 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_2^4 x^{\pi-1}\,dx$

Solução: Temos que

$$\int_2^4 x^{\pi-1}dx = \left[\frac{x^\pi}{\pi}\right]_2^4 = \frac{4^\pi}{\pi} - \frac{2^\pi}{\pi} \approx 21,98.$$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cossec}\theta \operatorname{cotg}\theta\, d\theta$

Solução: Note que $(\operatorname{cossec}\theta)' = -\operatorname{cossec}\theta \operatorname{cotg}\theta$. Logo,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cossec}\theta \operatorname{cotg}\theta d\theta = [-\operatorname{cossec}\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} = -\operatorname{cossec}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right) dx$

Solução: Temos que

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - e^{-x}\right) dx = \left[\ln x + e^{-x}\right]_1^2 = (\ln 2 + e^{-2}) - (\ln 1 + e^{-1}) = \ln 2 + e^{-2} - e^{-1}.$$

4.5 Determine a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ das funções:

(a) $\displaystyle y = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

Solução: Sendo $\displaystyle y = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, utilizamos diretamente o Teorema Fundamental do Cálculo e obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{1}{t}dt\right) = \frac{1}{x}.$$

(b) $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^0 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$

Solução: Temos que

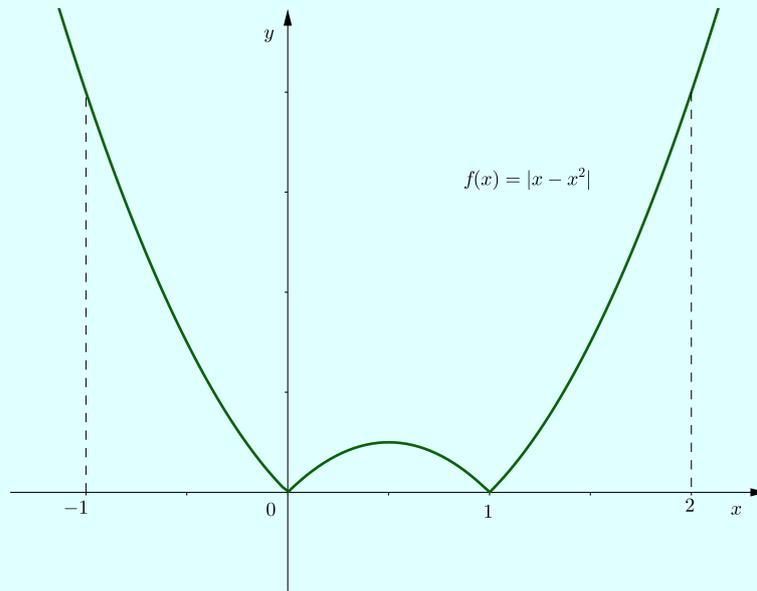
$$y = \int_{\sqrt{x}}^0 \operatorname{sen}(t^2)dt = -\int_0^{\sqrt{x}} \operatorname{sen}(t^2)dt.$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\int_0^{\sqrt{x}} \text{sen}\,(t^2)dt\right) = -\text{sen}\,x\,\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = -\frac{\text{sen}\,x}{2\sqrt{x}}.$$

4.6 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x - x^2|\,dx$

Solução: Considere o gráfico da função $f(x) = |x - x^2|$ abaixo

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} |x - x^2|\,dx &= -\int_{-1}^{0}(x - x^2)\,dx + \int_{0}^{1}(x - x^2)\,dx - \int_{1}^{2}(x - x^2)\,dx \\
&= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1} - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3}\right] + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left[\left(\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right)\right] \\
&= \frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \text{cossec}^2 2\theta\,\text{cotg}\,2\theta\,d\theta$

Solução: Fazemos

$$u = \text{cotg}\,(2\theta) \Rightarrow du = -2\,\text{cossec}^2\,(2\theta)\,d\theta.$$

Assim, podemos escrever

$$\int \operatorname{cossec}^2 2\theta \operatorname{cotg} 2\theta \, d\theta = -\int \frac{u}{2}\, du = -\frac{u^2}{4} + C$$

Logo, voltando para a variável original

$$\int \operatorname{cossec}^2 2\theta \operatorname{cotg} 2\theta \, d\theta = -\frac{\operatorname{cotg}^2 2\theta}{4} + C.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+3\operatorname{sen}^2 x}\, dx$

Solução: Fazemos

$$u = 1 + 3\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow du = 3 \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx = 3 \operatorname{sen} 2x \, dx.$$

Assim, podemos escrever

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+3\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int \frac{du}{3u} = \frac{\ln u}{3} + C.$$

Logo, voltando para a variável original

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+3\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \frac{\ln(1+3\operatorname{sen}^2 x)}{3} + C.$$

(d) $\displaystyle\int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\, dx$

Solução: Fazemos

$$u = 1 + \operatorname{sen}^2(x-1) \Rightarrow du = 2\operatorname{sen}^2(x-1)\ \cos(x-1)\, dx$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\, dx = \int \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{u^{3/2}}{3} + C$$

Logo, voltando para a variável original

$$\int \sqrt{1+\operatorname{sen}^2(x-1)}\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1)\, dx = \frac{(1+\operatorname{sen}^2(x-1))^{3/2}}{3} + C.$$

4.7

(a) Seja f uma função periódica de período p, ou seja $f(x+p) = f(x)$. Mostre que

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_p^{a+p} f(x)\,dx$$

Interprete esse resultado geometricamente.

Solução: Seja F uma primitiva de f. Note que

$$F'(x+p) = f(x+p) = f(x) = F'(x),$$

isto é, F também é uma função periódica.

Logo,

$$\int_0^a f(x)\,dx = F(a) - F(0) = F(a+p) - F(0+p) = \int_p^{a+p} f(x)\,dx$$

como queríamos.

Geometricamente, esta igualdade significa que a área sob a curva de f ao longo do intervalo $[0,a]$ é igual a área sob a mesma curva ao longo do intervalo $[p, a+p]$.

(b) Se além disso, f for ímpar, mostre que

$$\int_0^p f(x)\,dx = 0$$

Solução: Fazendo $a = -p$ na igualdade provada no ítem anterior, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{-p} f(x)\,dx &= \int_p^0 f(x)\,dx \\
-\int_{-p}^0 f(x)\,dx &= -\int_0^p f(x)\,dx \\
\int_0^p f(x)\,dx - \int_{-p}^0 f(x)\,dx &= 0 \qquad (10)
\end{aligned}$$

Agora, note que f é ímpar se, e somente se $f(-x) = -f(x)$ em $[0,p]$. Assim, fazendo a substituição

$$u = -x \Rightarrow du = -dx; \quad x = 0 \Rightarrow u = 0; \quad x = p \Rightarrow u = -p$$

podemos escrever

$$\int_0^p f(x)\,dx = \int_0^{-p} f(-u)\,(-du) = \int_{-p}^0 f(-u)\,du$$

Como $f(-u) = -f(u)$, resulta que

$$\int_0^p f(x)\,dx = -\int_{-p}^0 f(u)\,du$$

mas

$$\int_{-p}^0 f(u)\,du = \int_{-p}^0 f(x)\,dx$$

ou seja,

$$\int_0^p f(x)\,dx = -\int_{-p}^0 f(x)\,dx \tag{11}$$

Logo, substituindo (11) em (10), segue que

$$2\int_0^p f(x)\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^p f(x)\,dx = 0$$

como queríamos.

4.8 Calcule as seguintes integrais utilizando a mudança de variável adequada.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

Solução: Faremos a seguinte substituição

$$x = 2\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow dx = 2\cos\theta\,d\theta; \quad x = 0 \Rightarrow \theta = 0; \quad x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Então, escrevemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{2\cos\theta d\theta}{\sqrt{(4-(2\,\text{sen}\,\theta)^2)^3}} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} \sec^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}(\text{tg}\,\theta)\Big|_0^{\pi/6} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 0\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}^{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}\,dt$

Solução: Faremos a seguinte substituição

$$u = e^t \Rightarrow du = e^t\,dt; \quad t = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow u = \frac{3}{4}; \quad t = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \Rightarrow u = \frac{4}{3}.$$

Então, escrevemos

$$\int_{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}^{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}\,dt = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Agora, para resolvermos esta integral, faremos a seguinte substituição

$$u = \operatorname{tg}\theta \Rightarrow du = \sec^2\theta\,d\theta; \quad u = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right); \quad u = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)}^{\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)} \frac{\sec^2\,d\theta}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\theta)^3}} \\
&= \int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)}^{\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)} \frac{d\,\theta}{\sec\theta} \\
&= \int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)}^{\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)} \cos\theta\,d\,\theta \\
&= (\operatorname{sen}\theta)\Big|_{\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)}^{\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)} \\
&= \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}^{\ln\left(\frac{4}{3}\right)} \frac{e^t}{(1+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{1}{5}.$$

4.9 Nas integrais a seguir, podemos calcular seus respectivos valores utilizando uma integração por partes. Em cada uma delas, determine os candidatos a u e dv para que a utilização da referida técnica esteja correta. Após isso, escreva a fórmula da integração por partes com a sua escolha feita anteriormente.

(a) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \, dx$

Solução: Fazemos a seguinte escolha:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}\, dx; \quad dv = x\, dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Assim, utilizando $\int u dv = uv - \int v du$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x \ln x \, dx &= \left(\frac{x^2 \ln x}{2}\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\, d\, x \\
&= \left(\frac{x^2 \ln x}{2}\right)\Bigg|_1^2 - \left(\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 \\
&= \left[\left(\frac{2^2 \ln 2}{2}\right) - \left(\frac{1^2 \ln 1}{2}\right)\right] - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) \\
&= 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \\
&= \frac{8 \ln 2 - 3}{4}.
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \arccos\theta \, d\theta$

Solução: Fazemos a seguinte escolha:

$$u = \arccos\theta \Rightarrow du = -\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\, d\theta; \quad dv = d\theta \Rightarrow v = \theta.$$

Assim, utilizando $\int u dv = uv - \int v du$, escrevemos

$$\int \arccos\theta \, d\theta = \theta \arccos\theta + \int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\, d\theta \tag{12}$$

Agora, para calcularmos esta última integral, fazemos a seguinte substituição:

$$t = \sqrt{1-\theta^2} \Rightarrow dt = -\frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\, d\theta.$$

Então,

$$\int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\, d\theta = -\int dt = -t + C = -\sqrt{1-\theta^2} + C.$$

Logo, subsituindo este resultado em (12), segue que

$$\int \arccos\theta \, d\theta = \theta \arccos\theta - \sqrt{1-\theta^2} + C.$$

(c) $\displaystyle\int x \operatorname{cossec}^2 x\, dx$

Solução: Fazemos a seguinte escolha:

$$u = x \Rightarrow du = dx; \quad dv = \operatorname{cossec}^2 x\, dx \Rightarrow v = -\operatorname{cotg} x.$$

Assim, utilizando $\int u dv = uv - \int v du$, obtemos

$$\int x \operatorname{cossec}^2 x\, dx = -x \operatorname{cotg} x + \int \operatorname{cotg} x\, dx \tag{13}$$

Note que a integral do segundo membro pode ser escrita como

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen} x}$$

Assim, fazendo $u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\, dx$, temos que

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln |\operatorname{sen} x| + C.$$

Logo, substituindo este resultado em (13), segue que

$$\int x \operatorname{cossec}^2 x\, dx = -x \operatorname{cotg} x + \ln |\operatorname{sen} x| + C.$$

4.10 Determine o valor médio das seguintes funções ao longo do intervalo dado:

(a) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$ em $[0, 2]$

Solução: Temos que

$$\begin{aligned} f_{\text{med}} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2-0} \int_0^2 -\frac{x^2}{2}\, dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{12} \right) \Bigg|_0^2 \\ &= -\frac{2^3}{12} + 0 \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Logo, $f_{\text{med}} = -\dfrac{2}{3}$ é o valor médio de f no intervalo dado.

(b) $g(t) = t^2 - t$ em $[-1, 2]$

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}
g_{\text{med}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(t^2-t)\,dt \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, $g_{\text{med}} = \dfrac{1}{2}$ é o valor médio de g no intervalo dado.

4.11 Com t meses de experiência um funcionário do correio é capaz de separar $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$ cartas por hora. Qual a velocidade média com que o funcionário consegue separar a correspondência durante os 5 primeiros meses de trabalho?

Dica: Use o TVM para integrais.

Solução: Utilizando o TVM para integrais e considerando a função $Q(t)$ no intervalo $[0, 5]$, temos que a velocidade média será dada por

$$\begin{aligned}
Q(t)_{\text{med}} &= \frac{1}{5-0}\int_0^5 (700-400e^{-0,5t})\,dt \\
&= \frac{1}{5}\left[(700t)\Big|_0^5 - 400\int_0^5 e^{-0,5t}\,dt\right] \\
&= \frac{1}{5}\left[700\cdot 5 - 400\int_0^5 e^{-0,5t}\,dt\right] \\
&= 700 - 80\int_0^5 e^{-0,5t}\,dt
\end{aligned}$$

Podemos calcular esta última integral fazendo a substituição

$$u = -0,5t \Rightarrow du = -0,5\,dt, \quad x = 0 \Rightarrow u = 0, \quad x = 5 \Rightarrow u = -2,5.$$

Então,

$$\begin{aligned} Q(t)_{\text{med}} &= 700 - 80\int_0^{-2,5} e^u \,\frac{du}{-0,5} \\ &= 700 + 160\int_0^{-2,5} e^u \,du \\ &= 700 + 160\,(e^u)\Big|_0^{-2,5} \\ &= 700 + 160\,(e^{-2,5} - 1) \\ &\approx 553,13 \end{aligned}$$

Logo, a velocidade média é aproximadamente $553,13$ cartas por hora.

4.12 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \ln^3 x\,dx$

Solução: Podemos utilizar integração por partes ($\int u\,dv = uv - \int v\,du$) escolhendo

$$u = \ln^3 x, \quad du = \frac{3\ln^2 x}{x}, \quad dv = dx, \quad v = x.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \ln^3 x\,dx &= x\,\ln^3 x - 3\int x\,\frac{\ln^2 x}{x}\,dx \\ &= x\,\ln^3 x - 3\int \ln^2 x\,dx \qquad (14) \end{aligned}$$

Esta última integral também pode ser resolvida por partes. Para isso, escolhemos

$$u = \ln^2 x, \quad du = \frac{2\ln x}{x}, \quad dv = dx, \quad v = x.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \ln^2 x\,dx &= x\,\ln^2 x - 2\int x\,\frac{\ln x}{x}\,dx \\ &= x\,\ln^2 x - 2\int \ln x\,dx \qquad (15) \end{aligned}$$

Finalmente, para esta última integral, escolhemos

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x}, \quad dv = dx, \quad v = x.$$

Então,

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= x \ln x - \int x\, \frac{1}{x}\, dx \\ &= x \ln x - x + C \qquad (16)\end{aligned}$$

Logo, substituindo (16) e (15) em (14), segue que

$$\begin{aligned}\int \ln^3 x\, dx &= x \ln^3 x - 3 \int \ln^2 x\, dx \\ &= x \ln^3 x - 3(x \ln^2 x - 2 \int \ln x\, dx) \\ &= x \ln^3 x - 3(x \ln^2 x - 2(x \ln x - x)) + C\end{aligned}$$

(b) $\int x\,(2+3x)^{\frac{1}{3}}\, dx$

Solução: Podemos utilizar a regra da substituição. Assim, escolhendo $u = 2 + 3x \Rightarrow du = 3\, dx$, temos que

$$\begin{aligned}\int x\,(2+3x)^{\frac{1}{3}}\, dx &= \int \left(\frac{u-2}{3}\right) u^{\frac{1}{3}}\, \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{9} \int (u^{\frac{4}{3}} - 2\, u^{\frac{1}{3}})\, du \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{3u^{\frac{7}{3}}}{7} - 2 \cdot \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4} \right) + C\end{aligned}$$

Logo, voltando para a variável original, segue que

$$\int x\,(2+3x)^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{1}{9} \left(\frac{3(2+3x)^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{3(2+3x)^{\frac{4}{3}}}{2} \right) + C$$

(c) $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

Solução: Utilizando as identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\,dx \\
&= \int \frac{(1-\cos(2x))^2}{4}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \big(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\big)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}\,dx \\
&= \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,dx \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,dx
\end{aligned}$$

Note que, utilizando uma substituição simples, podemos calcular facilmente estas duas últimas integrais e obter

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + C_1 \quad \text{e} \quad \int \cos(4x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4} + C_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 x\,dx &= \frac{3x}{8} - \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right) + C \\
&= \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{32} + C
\end{aligned}$$

onde $C = C_2 - C_1$.

4.13 Verdadeiro ou Falso. Se for verdadeiro, explique. Se for falso, explique ou dê um contraexemplo.

(a) A fórmula da integração por partes é obtida pela regra do produto para derivadas.

Solução: Verdadeiro! Da regra de derivação de um produto de duas funções $u = u(x)$ e $v = v(x)$,

$$(uv)' = u'v + uv',$$

segue por integração,

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v(x)\,dx$$

ou ainda,

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

que pode ser escrita na forma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

(b) Toda função integrável é contínua.

Solução: Falso! Como contra-exemplo, considere a função $\ln x$ que é integrável de 0 a 1, mas não é definida em $x = 0$.

(c) O Teorema do Valor Médio para integrais garante que existe um único ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

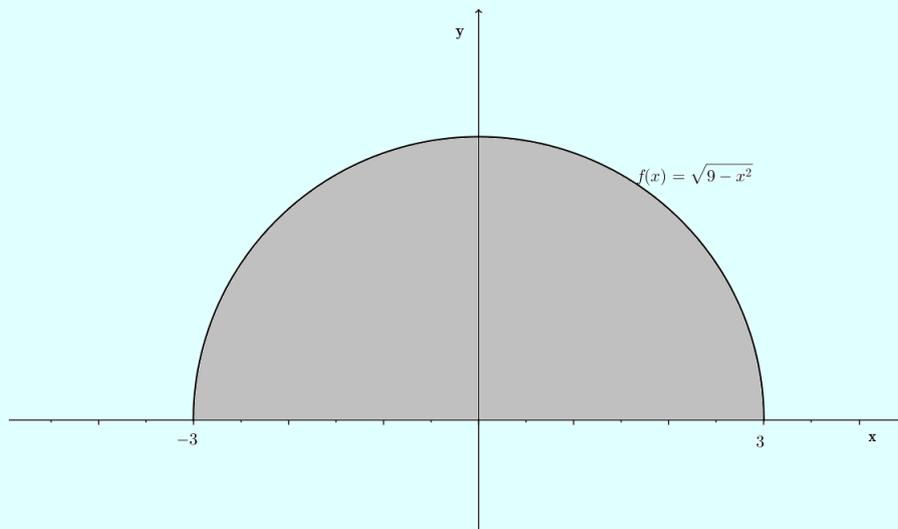
Solução: Verdadeiro! O TVM garante que existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Geometricamente, indica que existe um ponto no qual ao traçarmos uma reta horizontal na imagem de f, a área acima da reta e limitada por f é igual a área abaixo da reta até o eixo x.

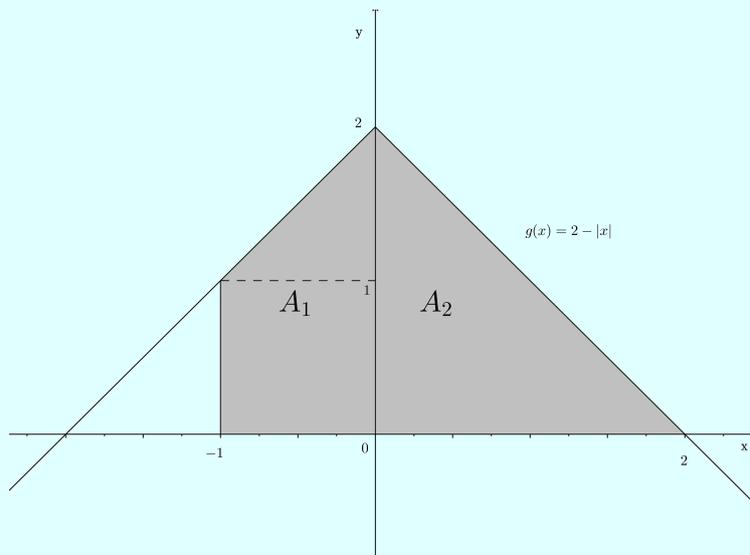
4.14 Esboce o gráfico dos integrandos e use áreas para calcular as integrais.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

Solução: Note que o gráfico da função $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ corresponde ao semicírculo de raio igual a 3, conforme indica a figura abaixo:

Logo, a área descrita pela integral é dada por

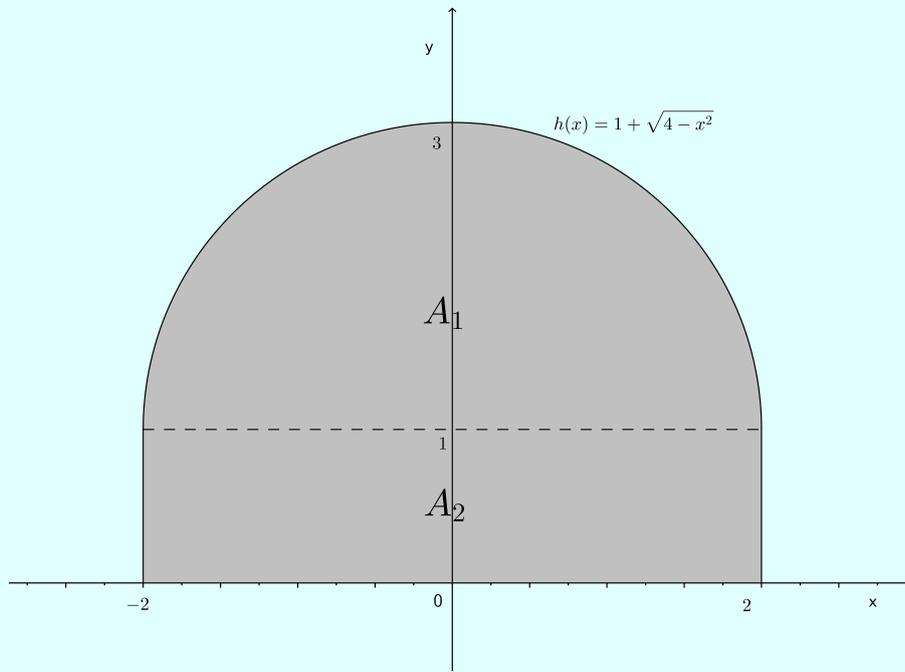
$$\text{Área} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2} \text{ u.a.}$$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2 - |x|)\, dx$

Solução: Observe que a região limitada pelo gráfico da função $g(x) = 2 - |x|$, pelas retas $x = -1$, $x = 2$ e $y = 0$ é da seguinte forma

Logo, a área descrita pela integral é dada por

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \frac{(2+1)\cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{7}{2} \text{ u.a.}$$

(c) $\int_{-2}^{2}(1+\sqrt{4-x^2})\,dx$

Solução: Observe que a região limitada pelo gráfico da função $h(x) = 1 + \sqrt{4-x^2}$, pelas retas $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$ é da seguinte forma

Logo, a área descrita pela integral é dada por

$$\text{Área} = A_1 + A_2 = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 1 = 2\pi + 4 \approx 10,283\,\text{u.a.}$$

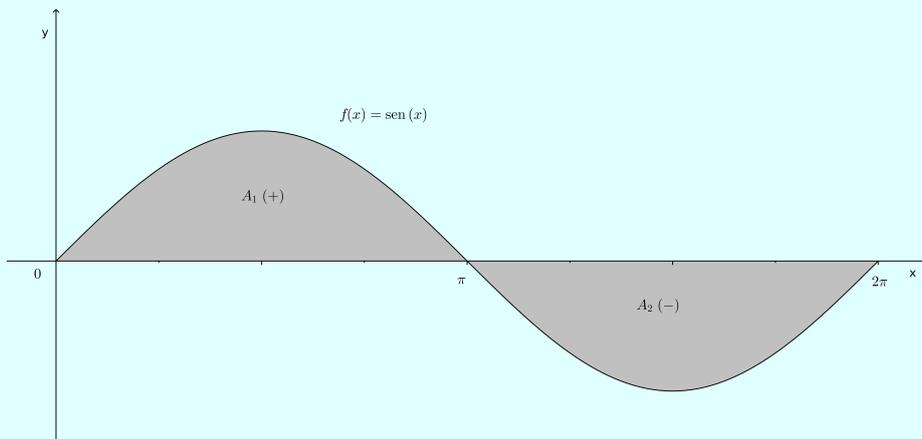
4.15

(a) Qual o valor da integral $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$?

Solução: Temos que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = (-\cos x)\Big|_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0.$$

(b) Sabendo do resultado do item (a), é verdade que podemos entender a integral acima como sendo a área compreendida entre o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 2\pi$? Explique.

Solução: Não é verdade, pois a região possui área, como podemos ver no gráfico abaixo:

Note que as áreas A_1 e A_2 podem ser calculadas da seguinte forma:

$$A_1 = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 2$$

e

$$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -2.$$

Assim,

$$A_1 + A_2 = 0.$$

(c) Elabore uma maneira para calcular a área da região descrita no item (b).

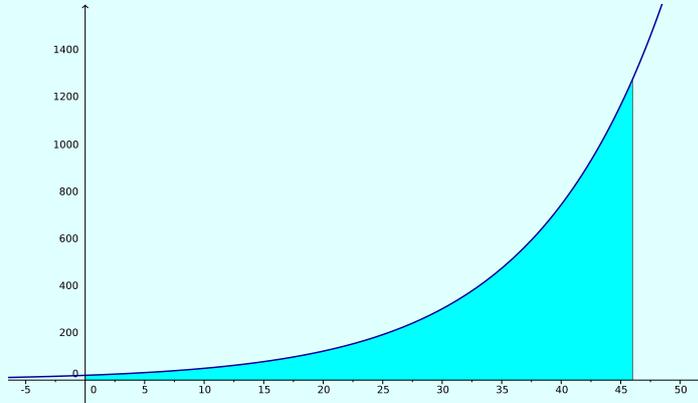
Solução: Para calcularmos a área da região descrita no ítem (b), separamos a integral em duas partes considerando o sinal de f em cada intervalo. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx \\
&= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} + (\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} \\
&= (-1(-1) - (-1)) + (1 - (-1)) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Logo, 4 u.a. é a área da região dada.

4.16 Se em 1970, foram utilizados $20,3$ bilhões de barris de petróleo no mundo todo e se a demanda mundial de petróleo cresce exponencialmente a uma taxa de 9% ao ano, então a demanda $A(t)$ anual de petróleo no tempo t é $A(t) = 20,3\, e^{0,09t}$ ($t = 0$ em 1970). Se a demanda continua crescendo a uma taxa de 9% ao ano, qual será a quantidade de petróleo

consumida entre os anos de 1970 e 2016?

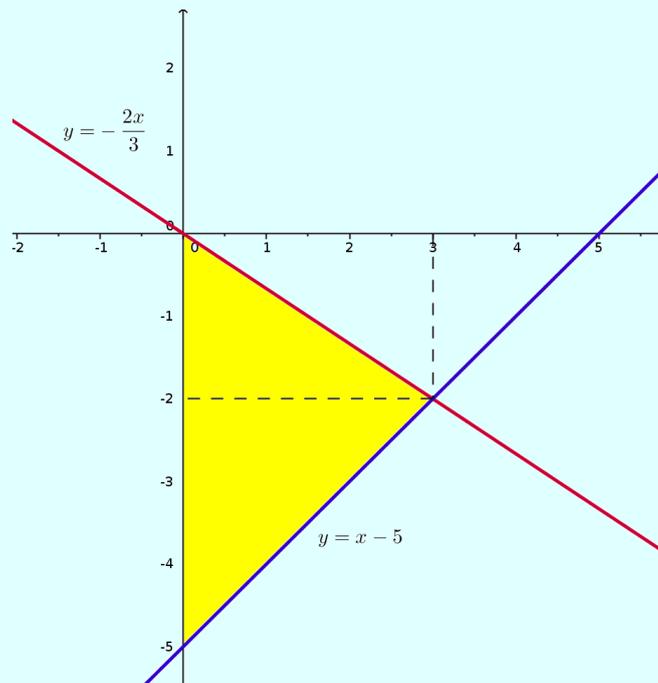
Solução: A quantidade de petróleo utilizada nesse período de tempo é a área sob a curva de demanda entre $t = 0$ e $t = 46$.

Então,

$$20,3\int_0^{46} e^{0,09t}\,dt = 225,56\,e^{0,09t}\Big|_0^{46} \approx 13940.$$

Logo, foram consumidos aproximadamente 13940 barris de petróleo.

4.17 Calcule as áreas das figuras determinadas pelas curvas dadas:

(a) $y = -\dfrac{2x}{3}$, $y = x - 5$ e $x = 0$.

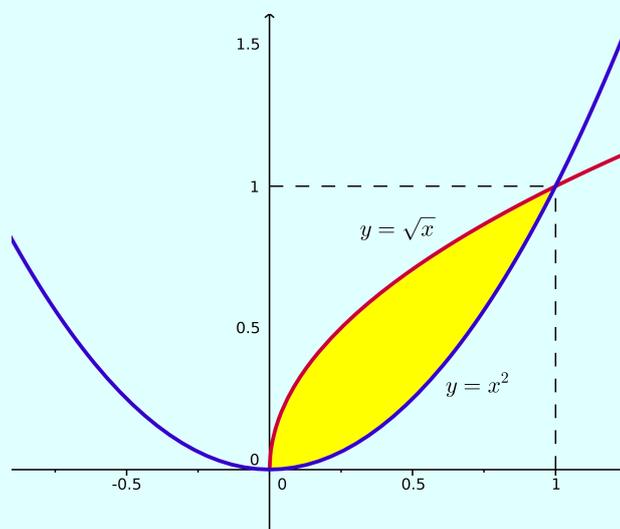
Solução: Temos que:

Note que as retas se interceptam quando

$$-\frac{2x}{3} = x - 5,$$

isto é, quando $x = 3$. Logo, a área procurada é

$$A = \int_0^3 \left[-\frac{2x}{3} - (x-5)\right] dx = \left[-\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x\right]_0^3 = -\frac{9}{3} - \frac{9}{2} + 15 = 7,5 \text{ u.a.}$$

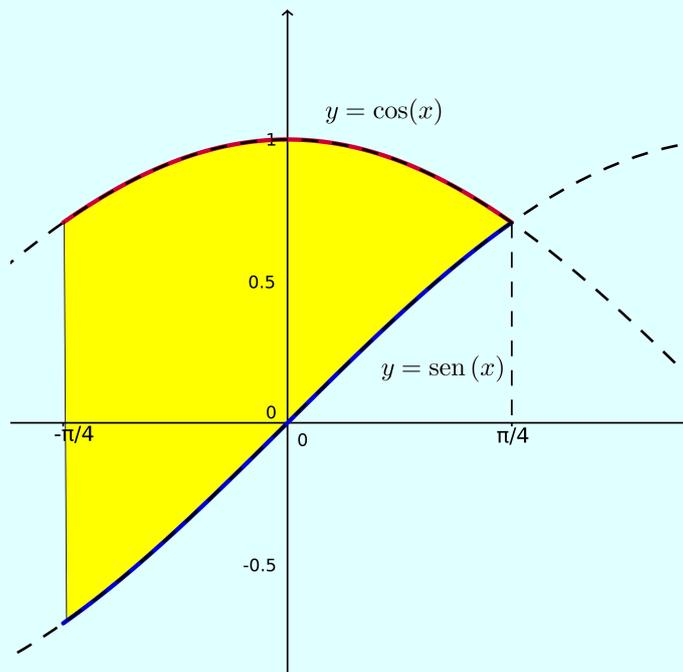
(b) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solução: Temos que:

Note que as curvas se interceptam quando $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$ e $x = 1$.

Logo,

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}} - x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ u.a.}$$

(c) $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{\pi}{4}$.

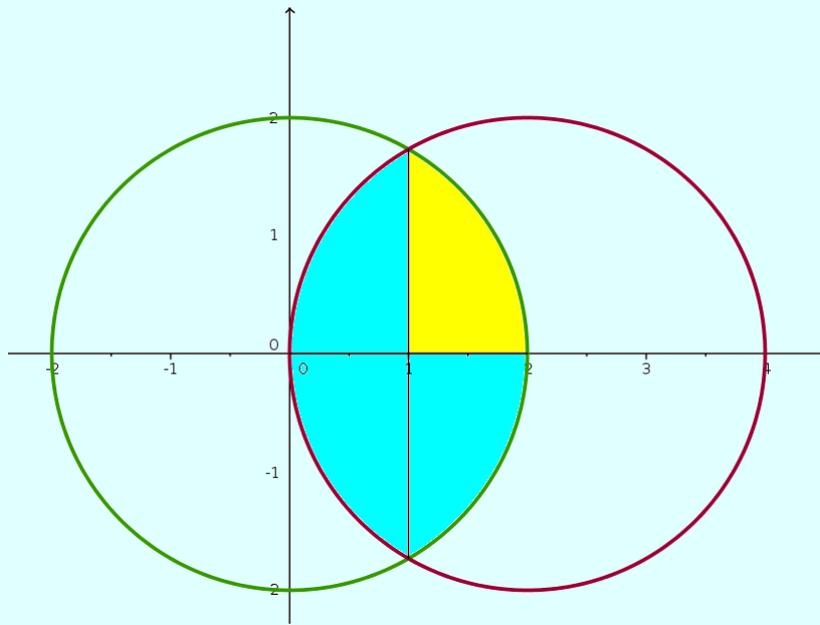
Solução: Temos que:

Logo, a área será

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = \sqrt{2} \text{ u.a.}$$

(d) A área comum a $x^2 + y^2 \leq 4x$ e $x^2 + y^2 \leq 4$.

Solução: Note que, completando quadrados, temos que a equação:

$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

corresponde a um círculo de raio 2 com centro em $(2, 0)$. E que $x^2 + y^2 = 4$ corresponde a um círculo com raio 2 e centrado na origem.

Determinamos o intervalo de integração, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 4x \end{cases}$$

Então, $x = 1$ e $y = \pm\sqrt{3}$. Pela simetria da região, calculamos somente a área da região:

$$\{(x, y) \,|\, 0 \le y \le \sqrt{3}, 1 \le x \le \sqrt{4 - x^2}\}$$

no primeiro quadrante (em amarelo) e multiplicamos por quatro. Integrando em relação a y:

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4 - y^2} - 1)\, dy \\ &= 4 \left(\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - y^2}\, dy - \int_0^{\sqrt{3}} dy \right) \\ &= 4 \left(\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - y^2}\, dy - \sqrt{3} \right) \end{aligned} \tag{17}$$

Agora, calculemos $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - y^2}\, dy$ fazendo $y = 2 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow du = 2 \cos \theta \, d\theta$. Observe que $y = 0 \Rightarrow \theta = 0$ e $y = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$. Então,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - y^2}\, dy &= 4 \int_0^{\pi/3} \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (17), segue que:

$$A = 4\left(\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2}\,dy - \sqrt{3}\right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \text{ u.a.}$$

4.18 Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int x^3\, e^{x^2}\, dx.$

Solução: Primeiramente, fazemos

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{2} = x\,dx.$$

Então,

$$\int x^3\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int t\, e^t\, dt.$$

Integrando por partes, fazemos

$$u = t \Rightarrow du = dt, \;\; dv = dt \Rightarrow v = e^t.$$

Então,

$$\int x^3\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int t\, e^t\, dt = \frac{1}{2}(t\, e^t - \int e^t\, dt) = \frac{1}{2}(t\, e^t - e^t) + C.$$

Logo, voltando para a variável original, segue que

$$\int x^3\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}(x^2\, e^{x^2} - e^{x^2}) + C.$$

(b) $\displaystyle\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\, dx;\; a, b \neq 0.$

Solução: Façamos

$$u = e^{ax} \Rightarrow du = a\, e^{ax}\, dx, \quad dv = \text{sen}(bx)\, dx \Rightarrow v = -\frac{\cos(bx)}{b}.$$

Então,

$$\int e^{ax}\,\text{sen}(bx)\, dx = \frac{-e^{ax}\,\cos(bx)}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\cos(bx)\, dx \tag{18}$$

Agora, calculemos $\displaystyle\int e^{ax}\,\cos(bx)\, dx$, novamente integrando por partes. Fazendo

$$u = e^{ax} \Rightarrow du = a\, e^{ax}, \quad dv = \cos(bx)\, dx \Rightarrow v = \frac{\text{sen}\,(bx)}{b}.$$

Então,

$$\int e^{ax}\,\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\,\mathrm{sen}\,(bx)}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,(bx)\,dx \tag{19}$$

Denotemos por $I = \displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,dx$. Então, de (18) e (19), temos:

$$I = \frac{a\,e^{ax}\mathrm{sen}\,(bx)}{b^2} - \frac{e^{ax}\cos(bx)}{b} - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Pois a última integral é exatamente a integral procurada. Assim,

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{a\,e^{ax}\mathrm{sen}\,(bx)}{b^2} - \frac{e^{ax}\cos(bx)}{b} \Rightarrow I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\,\mathrm{sen}\,(bx) - b\,\cos(bx)).$$

Logo,

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\,\mathrm{sen}\,(bx) - b\,\cos(bx)) + C.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solução: Primeiramente completamos os quadrados:

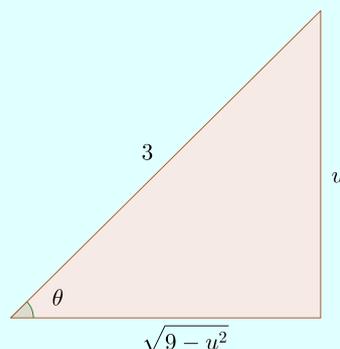
$$5-4x-x^2 = 9-(x+2)^2.$$

Fazendo $u = x+2 \Rightarrow du = dx$ e substituindo na integral, temos:

$$\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{(9-u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Agora, fazendo $u = 3\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow du = 3\,\cos\theta\,d\theta$ e $(9-u^2)^{\frac{3}{2}} = 27\cos^3\theta$, temos:

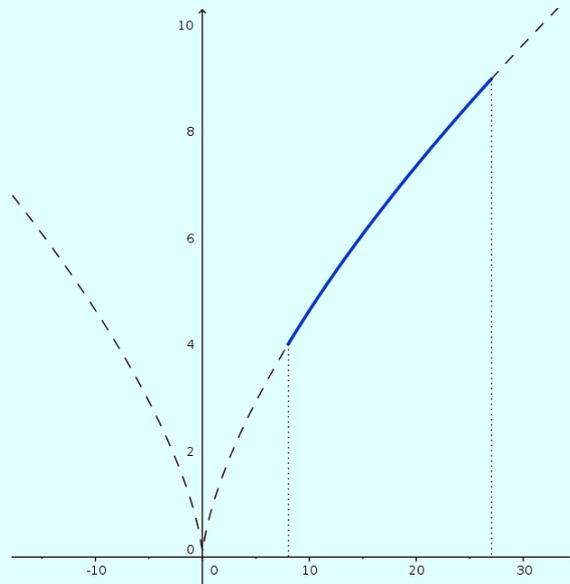
$$\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{9}\int \sec^2\theta\,d\theta = \frac{\mathrm{tg}\,\theta}{9} + C.$$

Assim, utilizando o triângulo retângulo abaixo

temos que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{u}{\sqrt{9-u^2}} = \dfrac{x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. Substituindo no resultado da integral, segue que:

$$\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+2}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C.$$

4.19

(a) Calcule o comprimento de arco da curva $y = \sqrt[3]{x^2}$ entre os pontos $(8, 4)$ e $(27, 9)$.

Solução: Temos que:

Então,

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{e} \quad \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Logo,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \frac{1}{3} \int_8^{27} \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

Agora, façamos $u = 9\sqrt[3]{x^2} + 4 \Rightarrow du = \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}\, dx$. Note que $x = 8 \Rightarrow u = 40$ e $x = 27 \Rightarrow u = 85$.

Logo,

$$L = \frac{1}{3} \int_8^{27} \frac{\sqrt{9x^{\frac{2}{3}} + 4}}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \frac{1}{8} \int_{40}^{85} \sqrt{u}\, du = \frac{5}{27}(17\sqrt{85} - 16\sqrt{10}) \text{ u.c.}$$

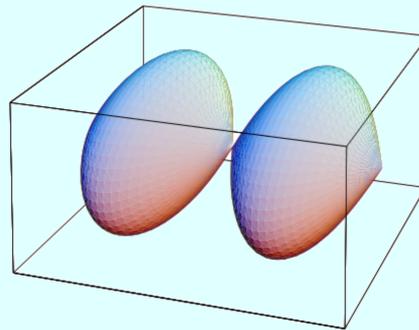
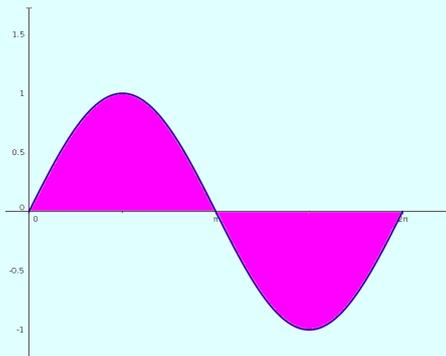
(b) Qual é o trabalho realizado ao se esticar uma mola em 8 cm sabendo que a força de 1 N a estica em 1 cm? (*Dica:* Use a lei de Hooke.)

Solução: De acordo com a lei de Hooke, a força de y N que estica em x m a mola é dada por $y = kx$, onde k é uma constante. Como $x = 0,01$ m e $y = 1$ N, temos $k = 100$ e $y = 100x$.

Logo, o trabalho realizado será:

$$W = \int_0^{0,08} 100x\, dx = 0,32 \text{ J}.$$

4.20 Calcule o volume do sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos x a região limitada pela curva $y = \operatorname{sen}(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ e o eixo dos x.

Solução: Temos que a região e o sólido de revolução gerado são, respectivamente:

Pela simetria do sólido, calculamos o volume da metade do sólido e multiplicamos o resultado por 2. Assim,

$$\begin{aligned} V(S) &= 2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)\, dx \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2}\, dx \\ &= \pi \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos(2x)\, dx \right) \\ &= \pi^2 \text{ u.v.} \end{aligned}$$